El Número Áureo

La Fórmula Divina de Fibonacci

Orendain López Vergara Luz Tsayam
Calvillo Hernández Metzli
Leyva Garía Mayte

Area - Físico-matemáticas

Centro Universitario Anglo Mexicano. Morelos
Asesor: Carmen Toledo

Antecedentes:

Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1250) , también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración actualmente utilizado.

En 1202, a los 32 años de edad, publicó lo que había aprendido en el *Liber Abaci* (libro del ábaco o libro de los cálculos). Este libro mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones.

Fibonacci en este libro introduce la ahora conocida sucesión de Fibonacci la cual explicaba con parejas de conejos y su reproducción exponencial correspondiente a los meses que transcurrían, también en las ultimas paginas de este libro da una pequeña introducción a las proporciones,

El número áureo, número de oro, número de la proporción divina, o número Phi esta relacionado con la sucesión de Fibonacci la cual se encuentra presente en proporciones de todo tipo, desde proporciones en el arte, la naturaleza en general hasta estructuras arquitectónicas, entre otras.

donde tenia dibujos de proporciones del cuerpo en las cuales tiempo después se baso Da Vinci para su creación del hombre de Vitrubio.

Hipótesis:

La sucesión de Fibonacci y el número áureo se encuentra relacionado con el crecimiento proporcional y exponencial de lo seres vivos como plantas y animales, también esta gracias al numero áureo Fibonacci en una estructura arquitectónica, en el arte, así mismo como en las facciones de la cara y de mas, hay una proporción la cual nos resulta estética.

Objetivo:

Demostrar como es que la sucesión de Fibonacci y el número áureo están presentes en las proporciones del crecimiento exponencial, explicar en que consisten.

Introducción:

El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza

El número áureo aparece, en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo, ...

Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego.

Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En La Gran Pirámide de Keops, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es 2 Φ.

Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo Leonardo da Vinci. Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de Luca Pacioli editado en 1509.

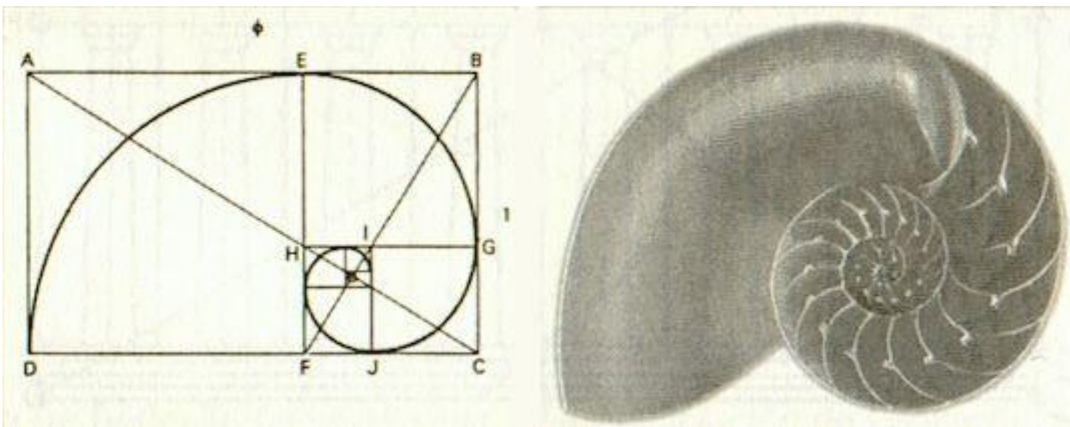
En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

El cuadro de Dalí *Leda atómica*, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico.

En la naturaleza, aparece la proporción áurea también en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros y la formación de caracolas.

La espiral logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo ABCD y le sustraemos el cuadrado AEFD cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una espiral logarítmica.



Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante) o espiral geométrica (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética). J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del *nautilus*.

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números enteros descubierta por matemáticos hindúes hacia el año 1135 y descrita por primera vez en Europa gracias a Fibonacci. La sucesión se describe de la forma siguiente:

F(0) = 0;
F(1) = 1;
F(n) = F(n-1) + F(n-2)

Lo que da la recurrencia siguiente:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597…

Aparte de que esta sucesión tiene varias propiedades interesantes, como que se puede formar cualquier número natural mediante la suma de términos de la sucesión, sin que ninguno se repita, lo más curioso de esta sucesión es su presencia en la naturaleza. La sucesión de Fibonacci está muy ligado a la vida y estos hechos lo demuestran:

Los machos de una colmena de abejas tienen un árbol genealógico que cumple con esta sucesión. El hecho es que los zánganos, el macho de la abeja, no tiene padre (1), pero sí que tiene una madre (1, 1), dos abuelos, que son los padres de la reina (1, 1, 2), tres bisabuelos, ya que el padre de la reina no tiene padre (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5), ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8) y así sucesivamente, cumpliendo con la sucesión de Fibonacci.

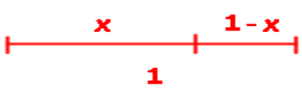
En la mano humana también se encuentra esta recurrencia, la longitud del metacarpo es la suma de las dos falanges proximales y la longitud de la primera falange es la suma de las dos falanges distales.

El número de pétalos de una flor es generalmente un término de Fibonacci. Hay flores con 2 pétalos, 3, 5, 8, 13, 21, 34, pero muy rara vez es un número que no esté en esta sucesión.

En la relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
En las espirales de los girasoles.
En las espirales de las piñas.
La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla,y en muchos lugares más.

La sección áurea es la división armónica de una segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

Tomemos un segmento de longitud uno y hagamos en el la división indicada anteriormente



Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación que tendremos que resolver

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow 1-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es x= $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{\left(-1+\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618... \Rightarrow \text{el numero de oro}$$

Es decir, la relación entre las dos partes en que dividimos el segmento es el número de oro.

Resultados:

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sucesión de Fibonacci: Según el propio Leonardo de Pisa en su *Libro de los ábacos*, la secuencia puede ayudar a calcular casi perfectamente el número de pares de conejos *n* meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad).

- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol (no sólo del nautilus)
- La relación entre los lados de un pentáculo.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
- La distancia entre las espirales de una piña.
- Las relaciones entre muchas partes corporales de los humanos y los animales:
- La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
- La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
- La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
- La relación entre las divisiones vertebrales.
- La relación entre las articulaciones de las manos y los pies.

Ademas, las plantas posicionan sus hojas de acuerdo a los patrones de Fibonacci. El crecimiento de las plantas se da en la punta del tallo (meristemo apical del tallo), que tiene una forma conica. Cuando se ve la planta desde arriba, se observa que las hojas que crecieron primero (las que estan mas abajo) tienden a estar radialmente mas alejadas del tallo. Tambien estan giradas con respecto al eje del tallo para no solaparse unas a otras. En 1837 los hermanos Bravais (Auguste y Louis) descubrieron que las nuevas hojas avanzan en forma rotatoria aproximadamente el mismo angulo, y que este angulo esta cerca de 137.5Âº. Este numero esta directamente relacionado con Phi. Si se calcula 360º/Phi, se obtiene 222.5º. Y el complemento, 360º-222.5º, es precisamente 137.5º, tambien llamado el Angulo Aureo. Esto ocurre porque cuando una planta crece, la estrategia que utiliza para garantizar su supervivencia consiste en maximizar la distancia entre las ramas y las hojas, buscando Ãngulos que no se solapen y en los que cada una de ellas reciba la mayor cantidad posible de luz, agua y nutrientes. El resultado es una disposicion en trayectoria ascendente, y en forma de helice, en la que se repiten los terminos de la sucesion de Fibonacci.

La formula del crecimiento de una colonia de bacterias contiene al numero de euler (e), pues se ajusta al llamado crecimiento exponencial. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que lo limiten. Los virus tambien crecen exponencialmente y, ante su ataque, el organismo reacciona lentamente. Esta es la respuesta correcta: si la respuesta fuese tan rapida como el ataque, se producira un equilibrio, y arrastrariamos la gripe durante largos años. Al ser lenta, el organismo puede hacer acopio de anticuerpos y dar un ataque masivo. En definitiva, la naturaleza no entiende de matemáticas, sino de eficiencia.

La molécula de ADN, que contiene el libro de la vida, también se ajusta a la proporción áurea. Cada ciclo de su doble hélice mide 34 angstroms de largo por 21 angstroms de ancho, dos números de la secuencia de Fibonacci cuyo ratio es, por supuesto, Phi.
Un matemático de la Universidad de Arizona, Alan Newell, y el estudiante Patrick Shipman han estudiado recientemente los cactus para determinar por qué este patrón numérico es tan universal. Estos investigadores analizaron la forma de la planta, el grosor de su piel y multitud de otras energías

biomecánicas que dirigen su crecimiento. Cuando introdujeron los datos en el ordenador, descubrieron, por sorpresa, que las configuraciones más estables seguían las formas basadas en la serie de Fibonacci.

La secuencia de Fibonacci en el arte

Tal es la reputación de *Phi*, que se dice que este número ha formado parte del "conocimiento secreto" protegido por generaciones de francomasones, *illuminati*, caballeros de la Orden de Rosacruz y otras sociedades secretas. Secreto o no, lo cierto es que las proporciones áureas han inspirado a arquitectos, pintores, escritores e incluso músicos de todas las épocas. Los expertos hablan de que construcciones tan antiguas como las pirámides egipcias se levantaron bajo el principio del número de oro.

- Relaciones arquitectónicas en las Pirámides de Egipto.
- La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas (s. V a. C..
- En los violines, la ubicación de las efes (los "oídos", u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.
- El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Da Vinci, entre otros.
- Las relaciones entre articulaciones en el hombre de Vitruvio y en otras obras de Leonardo da Vinci.
- En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la *Quinta Sinfonía* de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý.
- Autores como Bártok, Messiaen, Stockhausen compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan (a propósito) con el número áureo.

Las dimensiones del edificio de la sede de la ONU en Nueva York poseen la proporción áurea, con el fin de conseguir el orden arquitectónico perfecto en el epicentro de la organización que rige los designios del mundo. Incluso, intencionalmente o no, en el libro del Génesis de la Biblia se describe que "el arca (de Noé) tendrá 450 pies de largo, 75 pies de ancho y 45 de altura", donde la proporción de 75/45 es de nuevo el número dorado.

La proporcion Auria aplicada al cuerpo humano

La obra pitagórica, geométrica y matemática, nos llega a nosotros gracias a Euclides (c.325 a. C.?) que realizó la compilación del conocimiento geométrico por invitación de Ptolomeo I, para ser conservada en la biblioteca de Alejandría. Esta obra compuesta por trece libros denominada "*Elementos*" se salvo del incendio que destruyo la biblioteca. En el tomo II se encuentra resuelto el problema de encontrar la sección dorada en una línea recta. Marcus Vitruvius Pollio (25 a. C), arquitecto romano constructor durante el Imperio Romano de Oriente, conoce la obra geométrica de Euclídes, incluyendo por supuesto la sección dorada. Vitruvius escribe el tratado "*De architectura"*, obra compuesta por diez tomos. Lo interesante es que en el último tomo incluye las proporciones del cuerpo humano en un dibujo excepcional que influiría en la obra de Leonardo da Vinci. Entre otros problemas geométricos sin resolver por los griegos, estaba la "cuadratura del círculo", (dentro de un círculo, se trataba de construir con la regla y el compás un cuadrado que tuviera igual área que aquel) y Vitrubio, también sin resolverla, hace alusión al problema realizando un singular dibujo de un cuadrado encerrado en un círculo, y dentro de él, una figura humana masculina, con las piernas abiertas y los brazos extendidos dentro del perímetro que limita el círculo. La obra de este arquitecto pasó desapercibida a través del oscurantismo de la edad media, y con el advenimiento del renacimiento italiano, uno de los genios universales, Leonardo da Vinci, tiene contacto con la obra de Vitruvius y reinterpreta sus dibujos de las proporciones humanas, hasta el grado de ser uno de los más significativos de la obra leonardesca, lo cual para desgracia de Vitrubio, solo los expertos reconocen en él al autor original. No obstante la similitud del diseño, el dibujo de Leonardo contiene implícitamente una serie de secciones corporales tanto en el tronco como en las extremidades superiores e inferiores, que están en perfecta armonía con la "Divina Proporción". También dividió la cara en tercios equidistantes desde la raíz del pelo hasta el mentón, teniendo como eje la línea medio facial. Aunque no están señaladas por ninguna cifra, los que estamos interesados en el tema de la sección áurea, advertimos de inmediato su relación, máxime cuando sabemos que Leonardo ilustró un libro publicado en 1509 por su amigo el franciscano y matemático Luca Pacioli (1445-1514) El título del libro era nada menos que la "Divina Proportione". Pacioli escribio otro libro en 1494 llamado *Summa de Aritmética10,* sobre matemáticas y la geometría práctica de Platón, Aristóteles, Euclides y Arquímedes, haciendo referencia a las proporciones de la sección áurea.

A partir del Renacimiento, los artistas plásticos primero, y los cirujanos plásticos después, han utilizado el gran legado que el genio de Leonardo nos dejó. Éste establece en sus espléndidos dibujos un canon claro y preciso sobre las proporciones corporales, destacándose entre ellas las faciales. Tanto arquitectos como escultores y pintores, desde hace muchísimos años, han utilizado un compás de tres puntas que está diseñado especialmente en concordancia con la relación de 1.618, de tal manera que cuando el compás se abre, divide el área en un segmento mayor y otro menor automáticamente relacionados con la Divina Proporción. Ricketts adaptó este compás para utilizarlo en la antropometría facial facilitando con ello un análisis rápido y sin matemáticas, basta solo aplicarlo a cualquier estructura o superficie que se quiera estudiar.

Bibliografía:

http://es.wikipedia.org
http://www.tecnociencia.es/monograficos/Constantes/index.html
http://www.portalplanetasedna.com.ar/pagina_nueva_5.htm
http://spanish.fxstreet.com/privateresources/content/109510/content.asp?menu=knowledge
http://www.enigma-tico.com/fibonacci.html
http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/secundaria/matematicas/phi/marcoprincipal.htm