

XXI CONGRESO DE INVESTIGACIÓN

Título: Abejas Matemáticas

Autores: Ana Carolina Zulatto Lobato y Antinea Rentería Rodríguez

Profesores-Asesores: Mónica Guadalupe Borja Gallegos y Rubén Becerril Borja

Escuela de procedencia: Colegio Anglo Americano Lomas

Área: Ciencias Físico-Matemáticas

Antecedentes

En las últimas décadas, el ser humano ha tenido la necesidad de maximizar o minimizar cantidades en diferentes actividades cotidianas, por ejemplo en la economía se busca minimizar costos o maximizar utilidades y beneficios, o en procesos de construcción al minimizar los materiales utilizados. Sin embargo hay fenómenos en la naturaleza que siempre han ocurrido bajo este objetivo, como la forma de las burbujas de jabón, la estructura de un panal de abejas.

Debemos tener en cuenta que el cálculo no es un curso más de álgebra, trigonometría y geometría, sino que es el aprendizaje de nuevas técnicas y métodos que nos permiten desarrollar y encontrar la solución de problemas geométricos, físicos, de las ciencias naturales, etc. de una forma sistemática.

Objetivo

Seleccionar problemas donde compararemos las soluciones con cálculo diferencial y de otra forma alterna, con el fin de justificar que el cálculo diferencial es más directo.

Metodología

Presentación de cada uno de los problemas a resolver y la solución de éstos usando cálculo u otra forma alternativa.

Marco teórico

El dominio del Cálculo Diferencial les llevó a los científicos varios siglos en llegar a concretarlo. En la lista de personajes que desarrollaron estos trabajos se encuentran desde la Grecia Antigua: Zenón de Elea, Eudoxo de Cnido, Arquímedes de Siracusa, hasta Fermat, Descartes, Barrow, etc.

Fue hasta el siglo XVII que se tuvo la madurez social, científica y matemática para desarrollar el Cálculo Diferencial e Integral. Los padres de éste fueron el inglés Isaac Newton (1642–1727) y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

Dentro de las primeras aplicaciones que aprendemos del cálculo diferencial se encuentra el determinar máximos y mínimos de ciertas situaciones.

Tener el dominio de esta metodología nos simplifica una gran cantidad de operaciones aritméticas y algebraicas como lo observaremos en el desarrollo de este trabajo.

Desarrollo

En nuestros cursos de bachillerato aprendemos a encontrar los máximos y mínimos de una función utilizando el cálculo diferencial, sin embargo, es posible determinar máximos y mínimos sin esta poderosa herramienta. En esta breve exposición mostramos algunos ejemplos.

Un problema isoperimétrico

Considérese un rectángulo con perímetro dado P , determinar las dimensiones de éste de tal forma que encierre el área máxima.

Si x y y son las longitudes de los lados del rectángulo, el área buscada es $A = xy$. Puesto que el perímetro dado es $P = 2x + 2y$, un lado medirá $y = \frac{P - 2x}{2}$, por lo que el área del rectángulo será

$$A(x) = x \left(\frac{P - 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} Px - x^2$$

Solución:

- Usando cálculo diferencial: Se deriva la función $A(x)$ para obtener $A'(x) = \frac{1}{2}P - 2x$, se iguala a cero y se obtiene $x = \frac{1}{4}P$. Se deduce que el rectángulo es un cuadrado.

- Usando álgebra: Se completa el trinomio cuadrado perfecto para obtener un binomio al cuadrado

$$A(x) = \frac{1}{2}Px - x^2 = \frac{P^2}{16} - \left(\frac{P^2}{16} - \frac{1}{2}Px + x^2 \right) = \frac{P^2}{16} - \left(x - \frac{P}{4} \right)^2 \leq \frac{P^2}{16}$$

Así que el área nunca pasará de $\frac{P^2}{16}$ y alcanzará este valor si y sólo si $x = \frac{P}{4}$.

La desigualdad media aritmética-media geométrica (MA-MG)

Si x, y, z son tres números positivos entonces: $\frac{x+y+z}{3} \geq (xyz)^{1/3}$ y la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

La lata de sopa con volumen dado

Se tiene una lata cilíndrica, sellada por ambos lados, con un volumen dado V . ¿Cuáles son las dimensiones de la lata (radio r y altura h) para que el gasto en material sea mínimo?

El área superficial de la lata es: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ y el volumen es: $V = \pi r^2 h$

De la segunda expresión se despeja h y se sustituye en la primera: $S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

- Usando cálculo: Derivamos e igualamos a cero $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$ de donde $V = 2\pi r^3$, que al comparar se tiene $\frac{V}{\pi r^2} = h = 2r$ Por lo tanto la altura es igual al diámetro.

- Usando la desigualdad MA-MG: Escribimos la forma equivalente para el área superficial

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right) = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} \right)$$

$$\text{O bien } \frac{S}{6\pi} = \frac{1}{3} \left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} \right) \geq \left(r^2 \cdot \frac{V}{2\pi r} \cdot \frac{V}{2\pi r} \right)^{1/3} = \left(\frac{V^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

De donde $S \geq 6\pi \left(\frac{V^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. Por lo tanto el área superficial siempre es mayor o igual al término de la

derecha y será igual si y solo si $r^2 = \frac{V}{2\pi r} = \frac{V}{2\pi r}$, es decir, cuando $V = 2\pi r^3$.

Los panales de las abejas

Un caso interesante de optimización que aparece en la naturaleza es el que ocurre en los panales. Las celdas de éstos tienen forma de pirámide triedral, la cual es un prisma hexagonal en el que un extremo ha sido reemplazado por tres cuadriláteros que forman un ángulo triedro. Esta forma sirve para que al construir las celdas juntas embonen y no dejen espacios sin utilizar. Sin embargo, el volumen de miel que pueden contener las celdas depende del ángulo en el que se construyan las tapas. Por otro lado, las celdas sobre un mismo plano del panal tienen forma de hexágono regular, una de las muchas figuras que pueden cubrir el plano sin dejar espacios.

El problema de calcular la forma de los fondos del panel se puede hacer usando cálculo diferencial. Se toma la siguiente función que depende del ángulo de inclinación del triedro.

El área superficial de una pirámide triedral se calcula por:

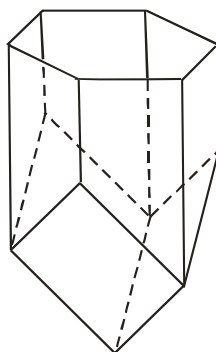
$$A = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cot(\theta) + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 \csc(\theta)$$

donde s es la longitud de un lado de la base hexagonal y h es la altura de la pirámide. Derivando respecto a θ

e igualando a cero obtenemos que $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54^\circ 44' 8.2''$.

Por otro lado, el problema bidimensional del panel de las celdas hexagonales se resuelve sin utilizar cálculo. Para esto se usa la idea de cubrir o teselar un piso con mosaicos. Se ha observado que solamente tres polígonos regulares que teselan el plano estos son el triángulo, el cuadrado y el hexágono. Se demuestra que el hexágono es la figura que contiene la máxima área y que además puede teselar un piso, es decir es la mejor opción.

En este momento nos preguntamos: ¿Cómo es que las abejas saben esto?



Resultados

En cada problema que mencionamos, llegamos al mismo resultado, observamos que sin importar el método que utilizáramos, éstos concuerdan.

En el ultimo ejemplo presentado, solo leímos y revisamos como se solucionó el problema de minimizar la cantidad de cera en la construcción de los panales, en dicha solución se usa la mezcla del cálculo y alguna otra técnica necesaria para complementarla, nosotras no la escribimos porque se requiere de procesos y análisis muy largos y el objetivo de este trabajo no se prestaba para ello.

Conclusiones

Concluimos que el cálculo diferencial es el método más fácil para encontrar máximos y mínimos y que aunque se complementa con geometría y álgebra nos ahorra camino para las soluciones.

Los problemas propuestos nos dan una idea de que el trabajar con solo álgebra y geometría se vuelve muy largo y a veces nos perdemos del objetivo pues sacas números y números y no sabes cuáles sirven y el cálculo diferencial es mas sistemático y nos guía de una manera más segura para llegar al objetivo.

El último problema planteado es muy interesante y fue el que nos motivo a proponer este trabajo, leer sobre la forma en que lo hacen y ver que hay muchas matemáticas atrás de ellas, es para respetarlas aún más, pues muestran su inteligencia con la precisión con la que realizan su labor.

Bibliografía

1. Hidalgo, Laura (2007). *Mosaicos*. Instituto de Matemáticas UNAM (Colección Temas de Matemáticas para Bachillerato). México.
2. Nahin, Paul J. (2004). *When least is best*. Princeton University Press, New Jersey.
3. Niven, Ivan (1981). *Maxima and minima without calculus*. The Mathematical Association of America (Colección The Dolciani Mathematical Expositions).
4. Stewart, James (2001). *Cálculo de una variable, Transcendentes tempranas*. 4ª ed. Thomson Learning. México.
5. <http://www.arrakis.es/~mcj/abejas.htm>