MFED
Educación y Desarrollo, A. C.
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas
Año 11, Número 100, mayo de 2010

MATEMÁTICAS PARA TODOS

EN ESTE BOLETÍN:

AUGUSTA ADA LOVELACE (1815-1852)

Es considerada como la primera programadora de la historia ya que escribió el primer algoritmo que se suponía debía calcular la máquina de Charles Babbage. Fue hija de Ana Isabel Milbanke y el famoso poeta George Gordon Byron (1788-1824), mejor conocido como Lord Byron. Aunque éste sólo vio por su hija durante su primer mes de vida, le dedicó varios poemas. Ada fue una niña débil: en una época la agobiaron fuertes dolores de cabeza y en otra no pudo caminar debido a problemas musculares. Su madre, Ana Isabel, era reconocida por sus conocimientos en astronomía y matemáticas y fue ella quien le proporcionó su primera instrucción matemática. A los 17 años, por medio de Mary Somerville, conoció a Charles Babbage y su extraordinaria máquina de cálculo. Tras conocer la máquina, Ada solicitó a su constructor que le recomendara algún profesor de matemáticas para entender mejor su funcionamiento, y así fue como contó con William Frend, William King y Augustus de Morgan, además de la misma Mary Somerville, entre sus profesores. Transcurrido algún tiempo, Babbage solicitó a Ada que hiciera la traducción del francés al inglés de un artículo de Luige Menabrea sobre dicha máquina. En esta traducción, Ada agregó sus notas y comentarios los que resultaron más extensos y precisos que el original de Menabrea. Al conocer mejor el funcionamiento de la máquina, además de describirla, plasmó lo que se supone debía ser el primer algoritmo que este artefacto procesaría. Esto lo hizo en *The Ladies Diary and Taylor's Scientific Memoirs.*

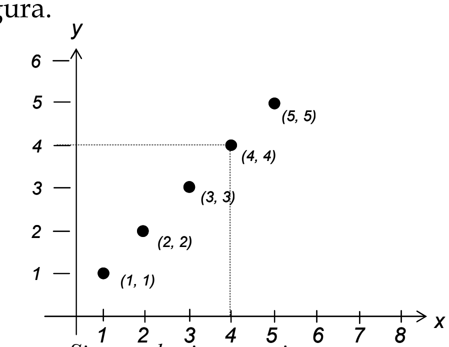
Ada pasó el resto de su vida estudiando la máquina y ayudando en su programación.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Los primeros planteamientos formales sobre la geometría analítica fueron plasmados por el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) quien, además de haber estudiado para abogado y combatir como soldado, se dedicó a estudiar diferentes problemas de la vida del hombre y su sociedad.

COORDENADAS CARTESIANAS

El sistema de coordenadas cartesianas (denominado así en honor a Descartes) se fundamenta en la representación con dos números de cada uno de los puntos que forman una figura; estos dos números se llaman coordenadas. Al analizar el comportamiento algebraico de todos los puntos representados, es posible definir una ecuación que describa las líneas rectas o curvas de de una figura.



Sistema de ejes cartesianos

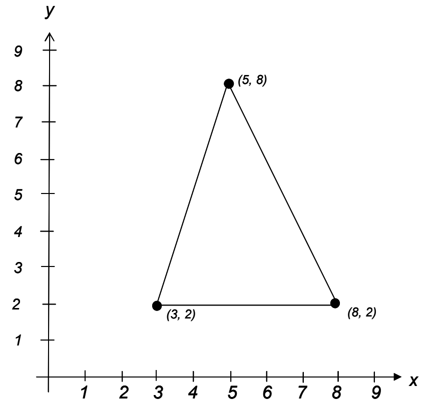
Es común que en el eje horizontal se ubiquen los valores *"x"*, a este eje se le conoce como el eje de las abscisas. En el eje vertical se colocan los valores *"y"*, al que se le conoce como el eje de las ordenadas.

Con este método se puede ubicar cualquier punto en un plano con solo tener dos números reales; por ejemplo, podemos decir que en la abscisa *5* y que en

> **"No hay enigmas. Si un problema puede plantearse, también puede resolverse."**
> *Ludwig Wirrgenstein*

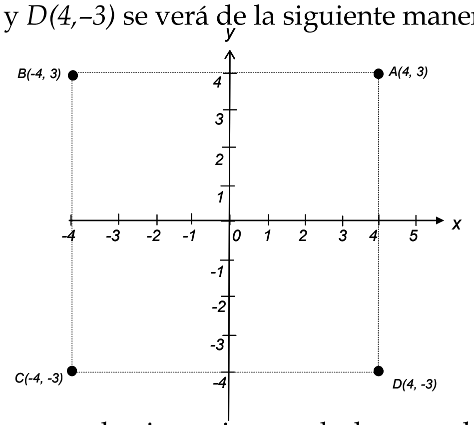
> **“Ninguna pérdida debe sernos más sensible que la del tiempo, puesto que es irreparable.”**
>
> *Zenón de Elea*

la ordenada 8 *(5,8)* se ubica el vértice superior de un triángulo. Esto se verá así.



De igual forma, se puede establecer que los otros dos vértices se encuentran en los puntos *(3, 2)* y *(8, 2)*. Con estos datos, habrá definido un triángulo.

Los puntos pueden contener números positivos o negativos, por ejemplo un cuadrado cuyos vértices están ubicados en las coordenadas *A(4,3)*, *B(–4,3)*, *C(–4,-3)* y *D(4,–3)* se verá de la siguiente manera.



Observen que el origen siempre lo hemos ubicado en el cruce de los dos ejes. Los valores negativos de las *x* los encontramos a la izquierda del origen, y los de las *y* están hacia bajo de éste punto.

Con estos conocimientos, estamos en condiciones de representar cualquier ecuación que se encuentre en la forma $y=f(x)$. Esto significa que en una ecuación la *y* estará en función de los valores que adquiera la *x*.

A manera de ejemplo, analicemos las siguientes ecuaciones:

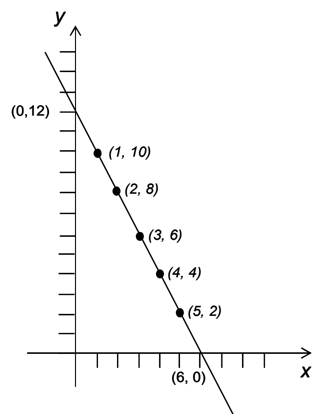
$$y = -2x + 12$$

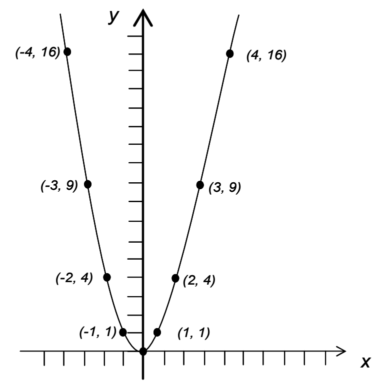
$$y = x^2$$

Estas dos ecuaciones las podemos representar en un plano cartesiano si las tabulamos, lo que implica que calculemos el valor de *y* al asignar algunos valores a la *x*.

$y = -2x + 12$	
X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2
6	0
7	–2
8	–4

$y = x^2$	
X	y
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16





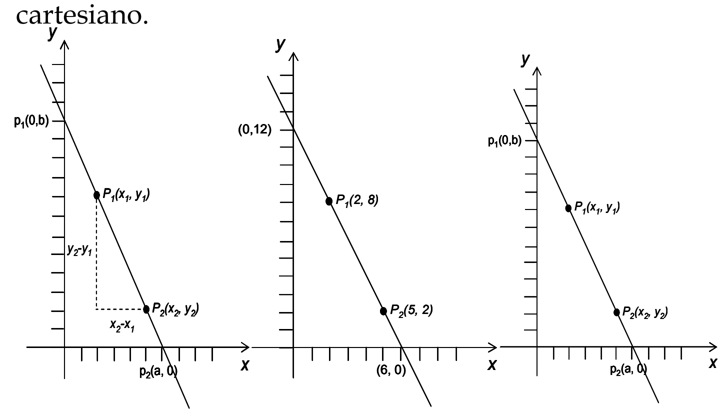
Tras lo anterior, es posible decir que la Geometría Analítica *“es el estudio de algunas figuras geométricas mediante el análisis matemático, el álgebra y su relación en un sistema de coordenadas cartesianas”*.

Tratemos ahora de obtener algunas ecuaciones de líneas rectas y curvas.

LA LÍNEA RECTA

Una línea recta tiene siempre la misma pendiente. La pendiente es lo mismo que la inclinación y se puede calcular al dividir el cateto vertical entre el cateto horizontal; esto en trigonometría se llama *tangente*.

Observe la representación de una recta en un plano cartesiano.



"La belleza es la primera prueba de que no hay lugar permanente en el mundo para matemáticas feas."

G. H. Hardy

En la primera de estas figuras podemos decir el cateto vertical es $y = y_2 - y_1$ y su cateto horizontal es $x = x_2 - x_1$. Con esto podemos calcular la pendiente de esta recta, a la que llamaremos m. A continuación presentamos la fórmula de la pendiente de una recta al dividir su cateto opuesto entre el adyacente, esto lo hacemos de las tres figuras:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \qquad \frac{2-8}{5-2} = -2 \qquad \frac{0-12}{6-0} = -2$$

Primer gráfica *Segunda gráfica* *Tercer gráfica*

Como pueden ver en la segunda y tercera gráficas, no importa qué puntos se tomen, la pendiente es la misma. En este caso es negativa, porque cuando aumentan las abscisas *(x)* las ordenadas *(y)* disminuyen.

A partir de lo anterior, podemos definir una ecuación para la línea recta en un plano cartesiano recto.

De la primera gráfica deducimos lo siguiente:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ;\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Si en la tercera gráfica consideramos que *(a, 0)* es el punto dos y *(y, 0)* es el punto uno y los sustituimos en la última ecuación que obtuvimos, tendremos:

$$y - 0 = \frac{0-b}{a-0}(x-a);\ y = \frac{-bx}{a} + \frac{ba}{a} = -\frac{b}{a}x + b \text{ -------1}$$

Si $\frac{b}{a} = m$ tendremos que la ecuación de una recta es:

$$y = -mx + b$$

Con esta ecuación podemos representar cualquier recta, sólo tenemos que conocer un punto (b) y su pendiente (m).

Observe que la ecuación que dibujamos tiene esta forma: $y = -2x + 12$

Utilizando la ecuación *1* podemos definir una fórmula que represente a una recta pero ahora en función de los puntos en los que corta la recta a los ejes coordenados.

$y = -\frac{b}{a}x + b$ Al dividir ambos términos entre b tendremos: $\frac{y}{b} = -\frac{bx}{ab} + \frac{b}{b}$ Con ello, podemos expresar a una recta de la siguiente manera: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Tras representar algunas rectas a través de una ecuación, podemos deducir algunas características de las rectas sin necesidad de tabularlas, por ejemplo:

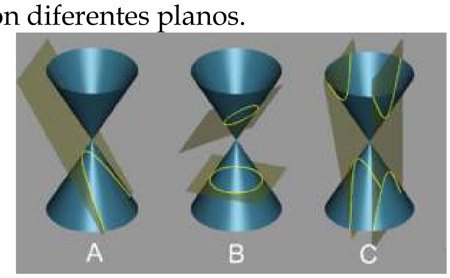
- ✓ Una recta que pasa por el origen no tendrá valor b, por lo que su ecuación sólo será: $y = mx$
- ✓ Una recta vertical no tendrá corte de las del eje de las ordenadas (y), ya que es paralela a este eje, su corte al eje de las abscisas (x) será en (x_0,0), por ello su ecuación es: $x = x_0$
- ✓ Lo mismo sucede con las rectas horizontales, sólo que el corte al eje de las ordenadas es en (0,y_0) por lo que su ecuación es $y = y_0$.

La geometría analítica también nos permite medir la longitud de una recta, esto es muy sencillo si al analizar a la primera gráfica presentada arriba aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos la distancia entre los dos puntos de una recta.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Las cónicas

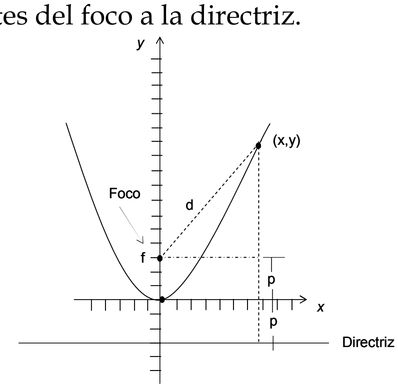
Ahora analizaremos algunas de las curvas más conocidas en la geometría, estas son las cónicas, cuyo nombre se obtiene porque surgen al cortar un cono con diferentes planos.



Si observa la figura *A*, verá que se trata de una parábola, producto de un plano inclinado que corta el cono. Esta figura es parecida a la ecuación que dibujamos arriba: $y = x^2$.

La parábola

La parábola se define como el lugar geométrico que se forma con todos los puntos que son equidistantes del foco a la directriz.



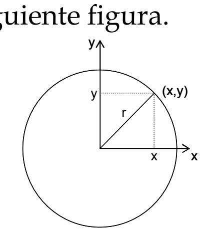
Ya que por definición la distancia del foco al punto *(x,y)* debe ser la misma que la del punto *(x,y)* a la directriz, podemos plantear la siguiente ecuación. $d = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$ De donde, al elevar todo al cuadrado, obtendremos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$
$$x^2 = 4yp$$
$$y = \frac{x^2}{4p}$$

Observe que este es el mismo tipo de ecuación que usamos en el primer ejemplo de una curva.

EL CÍRCULO

Otra curva considerada como una cónica es el círculo. Éste se puede obtenerse al cortar un cono con un plano perpendicular a su eje de revolución. Su ecuación se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en la siguiente figura.

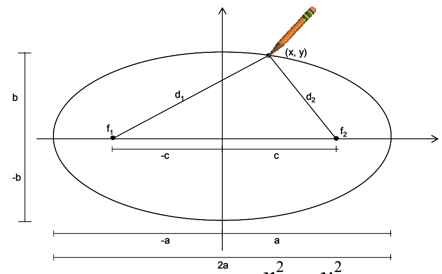


$$x^2 + y^2 = r^2$$

La *elipse y la hipérbola* también son cónicas. En esta ocasión, por falta de espacio, no podré desarrollar sus ecuaciones, sólo las mencionaré. Si nuestros lectores requieren información sobre estas curvas, envíenos un correo a alfonso@aprendizaje.com.mx.

LA ELIPCE

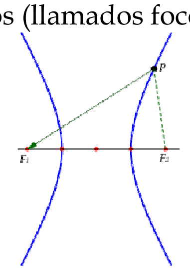
Esta cónica se define como el lugar en el plano geométrico que se forma al deslizar un lápiz guiado por una cuerda apoyada en dos puntos llamados focos. Por ello la longitud de la cuerda es una constante.



Su ecuación simplificada es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

LA HIPÉRBOLA

Una hipérbola es el conjunto de puntos *P=(x,y)*para los que la diferencia de sus distancias a dos puntos distintos prefijados (llamados focos) es constante.



Su ecuación simplificada es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Lunes 3. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB=AC \neq BC$. Sea P un punto en AB. Determina el número de puntos Q tales que los triángulos BPQ y ABC sean semejantes.

Viernes 7. Un barril está lleno de agua. Vacía un tercio de su contenido y agrégale un litro. Si después de hacer esto 6 veces quedan 3 litros, ¿cuántos litros había inicialmente en el barril?

Viernes 14. Si tienes un círculo de radio uno, ¿es posible encontrar un rectángulo que tenga la misma área que el círculo y el mismo perímetro que la circunferencia?

Matemáticas para todos. Año 11, número 100, mayo de 2010. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Educación y Desarrollo

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

Coordinación de Ingeniería de Sistemas