M F E D
Educación y Desarrollo, A. C.
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas
Año 11, Número 102, agosto de 2010

MATEMÁTICAS PARA TODOS

EN ESTE BOLETÍN:

GRACE CHISHOL YOUNG (1868-1944)

Fue hija del director de la oficina de pesas y medidas de Gran Bretaña y de una famosa pianista. Desde pequeña, su madre le enseñó cálculo mental y música y, a los 7 años, su padre la introdujo a la geometría euclidiana; estos hechos le permitieron desarrollar una gran habilidad para entender las matemáticas. A los 17 años presentó su examen para ingresar a Cambridge, el cual acreditó, pero, de acuerdo a la época, no la dejaron seguir estudiando por ser mujer. Ella continuó sola con sus estudios y a los 21 años publicó su primer libro de geometría. En él trató una serie de recomendaciones para la enseñanza de la geometría por medio de problemas de tres dimensiones.

Con la ayuda de su padre, ingresó al fin a Cambridge, en donde concluyó la licenciatura en matemáticas y, dado que en esa institución una mujer no podía obtener el doctorado, sin dudarlo se trasladó a Alemania para ingresar a la George Auguste Universitat Göttingen, en donde terminó su doctorado con honores. Se dice que fue la primera mujer que obtuvo un doctorado sin tener que disfrazarse de hombre.

A su regreso a Inglaterra, conoció a William Young quien le pidió ayuda para escribir un libro sobre astronomía. Un año después se casaron y tuvieron seis hijos. Grace elaboró varios libros para la enseñanza de la geometría, hizo aportaciones para el estudio de la Integral de Lebesque y estudió las derivadas de las funciones reales.

Un gran ejemplo más de la perseverancia e inteligencia de las mjeres.

Datos obtenidos de: Juego del Ada: Lourdes Figueiras Ocaña, María Molero Aparicio, Adela Salvador Alcaide, Nieves Zuasti Soravilla

APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS POR MEDIO DE PROBLEMAS

Una de las técnicas de mayor éxito en la enseñanza de las matemáticas es la del aprendizaje por medio de problemas, algunos de los elementos que la caracterizan son:

1. *Si se comprende el problema, se obtiene un grado importante de asimilación, pues el alumno estará conciente del reto al que se enfrenta.*
2. *Cuando se entiende el problema, éste se vuelve significativo para el alumno.*
3. *Echa a volar la imaginación para resolver el problema, lo que implica investigar, reflexionar, descubrir y probar. Elementos que al ser humano dan satisfacción*
4. *Para encontrar la solución, se hace un análisis profundo de los diferentes elementos matemáticos que se requieren, elemento que implica aprendizaje y seguridad.*
5. *Los elementos matemáticos necesarios no se obtienen de la memoria, sino que estos se vuelven a descubrir, lo que significa reflexión.*
6. *Obliga a pensar y reflexionar, lo que implica hacer que nuestro cerebro ponga en marcha mecanismos que lo alertan y le ayudan para adquirir habilidades para el uso de las matemáticas en la solución de problemas.*
7. *Se utilizan los conocimientos de matemáticas que se tienen e incluso se llegan a descubrir nuevos.*
8. *Entre más intentos de solución más se aprende, ya que, cada vez que se plantea una alternativa, se estará reflexionando sobre lo que sí o no funciona.*
9. *Un problema puede resolverse por diferentes procedimientos, lo que implica diversidad de razonamientos para llegar a un mismo fin.*
10. *El tomar un reto matemático y encontrar su solución implica satisfacción, hecho que hace que se busquen nuevos retos y con cada uno se adquiera más experiencia.*

"El saber y la razón hablan; la ignorancia y el error gritan."

Oskar María Graf

“Aquellos que no han aprendido nada, no han olvidado nada.”

Chavallier de Panat

Si se tuviera que resumir sobre el por qué de los buenos resultados de esta técnica, se podría recurrir al dicho popular:

“La necesidad es la madre de todas las ciencias”

Y no debemos olvidar que las matemáticas son el fundamento de todas las ciencias.

ORÍGENES Y BASES DE LA ENSEÑANZA POR MEDIO DE PROBLEMAS

Esta técnica fue la primera utilizada por la humanidad para la enseñanza de las matemáticas; Existe evidencia de ello en el papiro de Rhind, en el cual aparecen algunos métodos de cálculo para el trazo de canales y la construcción de pirámides a través de *85* problemas. Lo interesante aquí, es que este papiro plasma los conocimientos de un gran constructor de *1850 a. C.*

En la actualidad tenemos varias referencias sobre el aprendizaje por medio de problemas: el *Learning Based Problem* fue registrado, en *1960*, por la Universidad de McMaster de Hamilton Canadá, posteriormente fue ampliamente utilizado en las universidades de Queen Mary, Maastrich y Aalborg.

Tenemos una referencia más cercana a nosotros en la UAM, campus Xochimilco, donde su plan de estudios se fundamentó en la solución de casos. No debemos olvidar los cuadernos *Gader*, la serie de matemáticas y geometría *Schaum* y el libro propedéutico para el bachillerato del INEA.

Esta técnica parte de las teorías educativas de Vygostsky y Dewey, pero el verdadero intríngulis se encuentra en la selección de los problemas y la manera en la que estos se presentan a los alumnos.

ANATOMÍA DE UN PROBLEMA DE MATEMÁTICAS

En el número *101* de nuestro boletín, correspondiente al pasado mes de junio, presentamos un problema de análisis del Calendario matemático: un reto diario. Éste fue:

¿Cuántos conjuntos de dos o más enteros positivos consecutivos suman 105?

Una de las posibles soluciones me fue proporcionada por *Don Juan Casillas* al final de un concierto de la OFUNAM.

Seleccioné este problema intencionalmente, ya que a muchos profesores pudiera no parecerles significativo; y precisamente, el primer reto para los docentes al emplear ésta técnica, es hacer que el problema se vuelva significativo. El problema se volverá interesante para quienes lo entiendan y le presten atención, que es lo que debemos hacer los docentes al presentarlo. No es suficiente lanzarlo al aire para ver quienes son los inteligentes que lo cachan. Para lograr que los alumnos entiendan el problema, se puede dar una “probadita” de la solución, por ejemplo: dos números seguidos que suman *105* pueden ser:

$$52 + 53 = 105.$$

Con esto se logrará que los alumnos entiendan el problema. Además se deberá contestar a todas las preguntas que los alumnos hagan y aclarar qué son *“los conjuntos de dos o más enteros positivos consecutivos”*.

Lo segundo más importante, es hacer que los alumnos se interesen en el problema, lo cual puede resultar muy difícil, pues depende del tipo de alumnos que tengamos. Los niños de primaria tienden al juego y esa sería la técnica, pero este problema no se presta para ello. En la secundaria, nivel para el que el problema se ha seleccionado, lo que funciona con buenos resultados son los retos para los estudiantes y presentar las respuestas en equipo. Con esto, los alumnos al menos discuten sobre cómo resolverían el problema y precisamente de eso se trata; que le pongan atención.

En nuestro caso sería:

“Ya sabemos que 52 + 53 dan 105, ¿qué otros conjuntos de números enteros consecutivos dan 105?”

Si los alumnos encuentran una solución, lo interesante será que la expliquen ante todos sus compañeros, esto permite analizar qué hicieron para encontrar la solución y con ello aprender.

En caso de que los alumnos no encuentren la solución, se puede abrir una discusión sobre cuáles fueron las causas que les impidieron encontrarla. Esto uniforma el entendimiento del problema, pone al descubierto los conocimientos que hacen falta a los alumnos y las acciones que les impidieron resolverlo.

Después de esto se debe plantear uno o varios métodos para encontrar la solución. Estos métodos pueden ser los que el docente seleccione, por ejemplo: hacer una reflexión del procedimiento que los alumnos utilizaron y que les funcionó o no, los contenidos que vienen en los libros de texto o alguna desarrollada por el docente.

LA SOLUCIÓN

En este caso presento la solución que *Don Juan Casillas* me entregó. El partió de la fórmula de Gauss para obtener la suma de una serie de números.

En este punto es importante hacer dos observaciones:

a) Don Juan Casillas parte de la reflexión de que se busca una serie de números enteros y consecutivos que den 105. Esto se obtiene por medio de la fórmula que Gauss planteó cuando era niño.

$$\sum_{i}^{i+n} \frac{n}{2}\left(i_1 + i_n\right) = 105$$

b) Es muy probable que los alumnos no recuerden esta fórmula (tal vez los docentes tampoco), pero lo importante no es que la recuerden sino que la sepan deducir y aplicarla.

Ahora, el docente tiene un pretexto para deducir la fórmula y esto le da significado. Con esto se inicia la construcción del conocimiento y su culminación se da con la reflexión para obtener la solución.

Como docentes, nos las debemos ingeniar para deducir las fórmulas de manera adecuada, divertida y sencilla. En este caso la fórmula de Gauss *(1777-1855)* se puede deducir como lo hizo cuando éste era un niño.

La leyenda dice que en grupo de escuela de Gauss, el profesor J. G. Büttner necesitaba un rato libre para calificar unos exámenes, por ello pidió a sus pupilos que sumaran todos los números del 1 al 100.

El niño Gauss, a los cinco minutos, le dijo a su profesor:

¡Ya tengo la respuesta¡

Desde luego éste no le creyó, pero a insistencia de Gauss, tuvo Herr Bütter que pedirle el resultado.

Carl Fiedrich dijo ¡*5,050*!

El profesor se quedó admirado, pues fue el correcto. Le pidió a Gauss que pasara al pizarrón y explicara cómo había obtenido el resultado.

El gran Gauss hizo lo siguiente:

En lugar de sumar uno por uno de los números, sumo la primera mitad a la segunda mitad:

$$\begin{array}{l} 1 + \ 2 + \ 3 + \ 4 + \ldots + 48 + 49 + 50 \\ \underline{100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 53 + 52 + 51} \\ 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Al hacer esto me di cuenta de que todas las sumas le daban 101 y como eran 50 sumas, pues multiplicó el 101 por 50.

$$101 \times 50 = 5{,}050$$

Gauss no se conformó con esto, le dijo a su maestro que también había deducido una fórmula para sumar cualquier serie de números. Ésta era la siguiente:

*Si decimos que **n** es el total de números que debo sumar, en este caso 100 y a los números de la suma los identifico como:*

$$S = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots i_n$$

Y de acuerdo a mi procedimiento para encontrar el resultado de su problema, puedo plantear que:

$$S = \frac{n}{2}\left(i_1 + i_n\right)$$

O sea que si sumo el primero y el último de los números de todos los que voy a sumar y el resultado lo multiplico por la mitad de la cantidad de todos los números que debo sumar: obtengo el resultado.

Observe que la fórmula del niño Gauss es la misma que usó Don Juan Casillas.

Aun no llegamos a la reflexión precisa para resolver el problema, sólo hemos deducido la fórmula que nos podría dar el resultado. Esta reflexión es lo que en realidad le da la esencia al método que estamos usando. Aquí es en donde es necesario el ingenio para llegar al resultado.

Don Juan en su respuesta, supongo, pensó lo siguiente:

Como debo conocer los conjuntos de los números enteros consecutivos, que sumados den *105*, por ello cada conjunto debe responder a la siguiente fórmula:

$$\frac{n}{2}\left(i_1 + i_n\right) = 105$$

Dado que el primer objetivo es conocer i_1, que en este caso es el primer elemento de los enteros consecutivos que dan *105*, trataré de presentar a i_n en función de n, que es el número de enteros consecutivos que deben sumar 105. Esto se puede hacer así:

$i_1 = i_1 + 0$ $i_2 = i_1 + 1$ $i_3 = i_1 + 2$ $i_4 = i_1 + 3$	*De lo anterior podemos plantear la siguiente ecuación:* $i_n = i_1 + (n-1))$ $i_n = i_1 + n - 1$

“Educar no es carrera para vivir sino templar el alma para las dificultades de la vida.”

Caballero

Al sustituir i_n en la fórmula:

$$\frac{n}{2}(i_1 + i_n) = 105$$

Obtengo la ecuación para conocer i_1 en función de n:

$$\frac{n}{2}(i_1 + (i_1 + n - 1)) = 105$$

$$\frac{n}{2}(2i_1 + n - 1) = 105$$

$$2i_1 + n - 1 = \frac{210}{n}$$

$$i_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{210}{n} - n + 1\right)$$

De esta fórmula se deduce que, para que i_1 sea entero (condición del problema) el número *210* debe ser divisible entre n. Por ello todos los valores de n que dividan a *210* de manera exacta serán valores necesarios para calcular el primer elemento del conjunto buscado.

Aplicando lo anterior tenemos que *210* es divisible entre: n = *2, 3, 5, 6, 7, 10 y 14*

Al sustituir a n en la última fórmula:

$$i_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{210}{n} - n + 1\right)$$

Tendremos los siete números con los que inician los conjuntos de enteros consecutivos que dan 105.

Probemos con $n=10$:

$$i_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{210}{10} - 10 + 1\right) = 6$$

6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=105

Con lo anterior hemos encontrado que existen siete series de números que dan *105*.

Existen otras soluciones, unas más complejas y otras no tanto, el propio *Don Juan Casillas* nos dio una muy ingeniosa y sencilla, misma que puedo enviar por correo a quién se interese por ella dado que, por falta de espacio, no la puedo incluir en este número. Lo interesante es que con este problema, los docentes recordarán varios temas, adquirirán confianza para tratarlo, contarán con material para presentarlo y tendrán varios pretextos para usarlo en sus clases regulares. Algunos de los temas que se desarrollan son:

- ✓ Teoría de los números
- ✓ Sucesiones
- ✓ Series numéricas
- ✓ Planteamiento de ecuaciones
- ✓ Despejes y factorización
- ✓ Planteamiento y solución de problemas
- ✓ Aplicación de las cuatro operaciones básicas con enteros y fracciones
- ✓ Desarrollo del pensamiento abstracto.

Uno de los mayores inconvenientes de esta técnica es que requiere de tiempo del docente y, para la clase, de elementos con los que no siempre se cuenta, sin embargo, sus resultados son sorprendentes.

LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Martes 3. Sean *a, b, c, d, e* números reales tales que:

$$a > b$$
$$e - a = d - b$$
$$c - d < b - a$$
$$a + b = c + d$$

Ordena los números *a, b, c, d, e* de mayor a menor

Jueves 5. Encuentra todos los enteros positivos de cuatro dígitos de la forma *1a7b* que son múltiplos de *15*.

Lunes 30. Se dibujan los nueve vértices de una cuadrícula de 2 x 2. Encuentra el número de triángulos que se pueden construir con estos 9 vértices.

F M E D

Educación y Desarrollo

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM Coordinación de Ingeniería de Sistemas

Matemáticas para todos. Año 11, número 102, agosto de 2010. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx