Educación y desarrollo

MATEMÁTICAS PARA TODOS

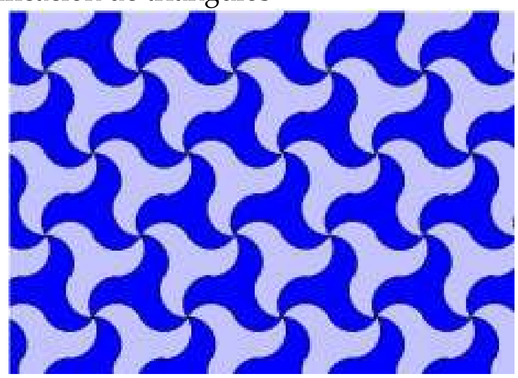
Año 11, Número 103, septiembre de 2010

EN ESTE BOLETÍN:

EMMY NOETHER

Debido a sus importantes contribuciones en la física teórica y la topología algebraica, Emmy fue considerada por David Hilbert y Albert Einstein como la mujer más importante de la historia de las matemáticas. Nació en Erlangen, Alemania, en 1882, en el seno de una familia judía. Su padre, Max Noether, fue un distinguido profesor de matemáticas en la Universidad de Erlangen. Ya que en aquella época no se le permitía estudiar a las mujeres, a los 18 años, con la ayuda de su padre, Emmy logró ingresar a la Universidad de Erlangen como alumna oyente. En 1904, los estatutos de la Universidad cambiaron y así, en 1907, Emmy obtuvo el grado de doctora "cum laude". Su tesis fue publicada en 1908. Tras esto, Emmy trabajó siete años en el Instituto de Matemáticas de Erlangen sin recibir remuneración alguna. En 1915, ingresó al mundialmente famoso departamento de matemáticas de la Universidad de Gotinga, pero en la facultad de filosofía se opusieron a su nombramiento, por lo que no pudo fungir como titular de cátedra hasta 1919. Desde esta fecha y hasta 1932, construyó un gran prestigio en los congresos matemáticos por sus trabajos y por la preparación de sus alumnos. Emmy revolucionó las teorías de los anillos, los cuerpos y el álgebra abstracta. En física, planteó el teorema de Noether, que explica la conexión entre la simetría en física y las leyes de conservación. En 1934, tras la ocupación del gobierno nazi, Emmy migró a Estados Unidos en donde fue nombrada profesor invitado en el Bryn Mawr Collage, en Pensilvania. Murió en 1935, a la edad de 53 años, víctima de una infección post-operatoria.

Uno de sus trabajos más admirados fue la modificación de figuras geométricas; por ejemplo, la construcción de este mosaico con base en la modificación de triángulos



Información obtenida de Wikypedia y http://centros5.pntic.mec.es

LO QUE PUEDE SER PROBABLE

En la vida diaria, usamos de diferentes maneras la palabra *probable*, por ejemplo, "es probable que llueva, que me saque la lotería o que me encuentre cien pesos". Sin embargo, no en todas estas aseveraciones se puede evaluar la probabilidad de que sucedan.

Si volteamos al cielo y vemos que hay nubes negras, es común que digamos "va a llover", pero también se puede decir: *con fundamento en la velocidad del viento, cantidad de humedad y la presión barométrica existe una probabilidad del 70% de que llueva por la tarde*. La primera aseveración se fundamenta en la intuición. La segunda, en datos con los que se puede especificar un porcentaje de certidumbre de que algo suceda. Es por ello que podemos decir que hay de probabilidades a probabilidades.

La probabilidad que se fundamenta en un conjunto de datos es una rama de las matemáticas. Ésta es

> **"La sabiduría no está en los hombres canos, sino en los libros viejos."**
> *Antonio de Guevara*

"Si tu intención es describir la verdad, hazlo con sencillez y la elegancia déjasela al sastre."

Albert Einstein

muy utilizada en las ciencias como economía, física, biología, ingeniería, astronomía, meteorología, etc. Y debido a que algunos de nuestros lectores nos han solicitado que volvamos a tratar este tema desde su base, en esta ocasión haré una breve introducción a la probabilidad.

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Pongamos algunos ejemplos para entender la probabilidad de forma sencilla:

Los volados

Al lanzar una moneda al aire, se obtiene uno de dos posibles resultados: a) que caiga *sol* o b) que caiga *águila*. Así, se puede decir que, al lanzar una moneda al aire, se tiene una probabilidad del 50% de que caiga *sol* y del 50% de que caiga *águila*.

Para quienes estudian la probabilidad, lanzar una moneda es un experimento que pueden realizar muchas veces para analizar qué sucede. Así, pueden lanzar 10 veces una moneda al aire con la misma fuerza y en el mismo sitio para ver si caen 5 *soles* y 5 *águilas*. Esto sucederá sólo si las condiciones en las que se lanzan los 10 volados son las mismas. Podemos decir que el que caiga una cara o la otra depende del azar y que como ambas caras tienen la misma posibilidad de quedar hacia arriba, cada una de ellas tiene el 50% de probabilidad de salir. A este tipo de hechos se les conoce como experimentos aleatorios.

Para calcular la probabilidad de que suceda una cosa u otra en un experimento aleatorio, podemos buscar una expresión matemática:

Podemos preguntamos *¿Cuál es la probabilidad* (P_s) *de que caiga sol al lanzar un volado?*

Reflexionando sobre los posibles resultados puedo decir que tengo una posibilidad de dos resultados posibles, lo cual se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$p_s = \frac{R_f}{R_p} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Donde: R_f: número de resultados favorables

R_p: número de resultados posibles

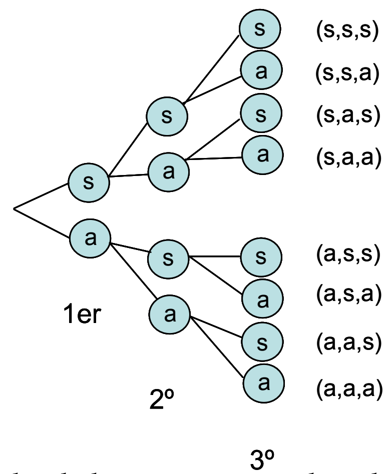
A esta ecuación se le conoce como la fórmula de la probabilidad clásica y se enuncia de la siguiente manera:

En un experimento en el que sus resultados dependen del azar, la probabilidad de que un resultado esperado se obtenga está definida por el número de posibles resultados favorables entre el número de posibles resultados.

LA PROBABILIDAD DE TRES VOLADOS

Así, si tiro tres veces una moneda al aire y deseo saber ¿qué tan probable es que obtenga dos *soles* y un *águila*? Tendré que conocer primero cuántos resultados favorables puedo tener y cuántos resultados posibles puede haber.

Para esto, se puede recurrir a una técnica conocida como árbol de resultados. Éste no es otra cosa que presentar todas las posibilidades que se pueden tener en un experimento de manera ordenada.



Del árbol, deduzco que puedo obtener ocho resultados, o sea que $R_p = 8$

Así mismo, veo que puedo obtener dos soles y un águila de tres maneras: *(s,s,a); (s,a,s); (a,s,s)* lo que implica que $R_f = 3$

Con estos resultados puedo establecer que tendré una probabilidad de:

$$P = \frac{R_f}{R_p} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$$

Esta es la probabilidad de obtener dos soles y un águila al lanzar tres veces una moneda.

Observe que en el enunciado de la probabilidad no se estableció el orden en el que deseábamos que aparecieran los *soles* y el *águila*. Si nos hubiéramos preguntado ¿Cuál es la probabilidad de que nos salgan primero dos *soles* y luego un *águila* en tres volados?

Del árbol deduzco que sólo hay un solo resultado favorable (s,s,a) de los 8 posibles resultados,

$R_f = 1$ *(s,s,a)*

$R_p = 8$

“No basta decir solamente la verdad, más conviene mostrar la causa de la falsedad.”

Aristóteles

Por lo tanto:

$$P_{(s,s,a)} = \frac{R_f}{R_p} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$$

Esta es la probabilidad de obtener primero dos soles y luego una águila al lanzar tres volados.

EL NEGOCIO DE LAS RIFAS

Ahora tratemos de calcular cuál es la probabilidad Ahora, tratemos de calcular cuál es la probabilidad de que nos saquemos uno de los tres premios en una rifa que tiene *100* boletos. La rifa se lleva a cabo por medio de una tómbola. Primero, se sacan *10* boletos y al décimo se le otorga el premio del tercer lugar (una licuadora); los boletos que se sacan de la urna no se devuelven a la misma. El segundo lugar (una lavadora) se otorga al décimo boleto que se saque en una segunda tanda, es decir, al boleto que salga en la posición *20*; tampoco se devuelven los boletos que han salido. Por último, el primer (una televisión de *42* pulgadas y *5,000* pesos) se otorga al boleto que salga en el lugar 30. El boleto cuesta *500* pesos.

Al inicio *(P_1)* tengo una posibilidad en *100* boletos de no ser eliminado. y conforme no me eliminen en la extracción de los *9* primeros números *(P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9)* la probabilidad de que saque al menos el tercer lugar crece de esta manera:

	Continúa
$P_1 = \frac{R_f}{R_p} = \frac{1}{100} = 0.01 = 1\%$	$P_5 = 0.0104$
	$P_6 = 0.0105$
$P_2 = \frac{R_f}{R_p} = \frac{1}{99} = 0.0101 = 1.01\%$	$P_7 = 0.0106$
	$P_8 = 0.0107$
$P_3 = \frac{R_f}{R_p} = \frac{1}{98} = 0.0102 = 1.02\%$	$P_9 = 0.0108$
$P_4 = \frac{1}{97} = \frac{1}{97} = 0.0103 = 1.03\%$	$P_9 = \frac{R_f}{R_p} = \frac{1}{92} = 0.0108$

Al mismo tiempo, con esto puedo decir que la probabilidad de que me eliminen en los primeros nueve boletos es la suma de todas las probabilidades de que de P_1 a P_9 salga. Esto es igual a 0.0936.

$$P_{1-9} = \sum_{n=1}^{n=9} p_n = 0.0936$$

Esto es lo mismo que señalar que, del cien por ciento de posibilidades de participar, tengo el 0.0936 de que me eliminen en las primeras 9 extracciones, lo que matemáticamente lo puedo expresar como:

$P_x = 1 - 0.0936 = 0.9064 = 9.064\%$

Si no he sido eliminado en las primeras nueve extracciones de boletos, la probabilidad que tengo de sacar la licuadora será:

$$P_{10} = \frac{1}{91} = 0.01098 = 1.098\%$$

Pero, para conocer cuál es la probabilidad de sacar la licuadora incluyendo el riesgo de que me eliminen en las primeras nueve extracciones, tengo que tener en cuenta el 0.9064 y esto se incluye multiplicando la probabilidad que tengo en P_{10} por la probabilidad de que me eliminen al inicio.

$P_{10} \text{ x } P_x = 0.01098 \text{ x } 0.9064 = 0.0099$

La probabilidad de que gane la licuadora es 0.0099 o 0.99%. Menos de 1%.

En la probabilidad, para facilitar los cálculos, siempre es bueno tratar de establecer fórmulas, ya que con ellas nos ahorramos operaciones. Por ejemplo:

Observe que al inicio P_f siempre es *1* y P_p se puede plantear en función del número inicial de los resultados, en este caso 100 menos la cantidad de boletos que han salido *(n)* menos uno. Esto se puede plantear de la siguiente manera:

$$P_p = P_{(100-(n-1))}$$

Para probar esta fórmula, apliquémosla para calcular la probabilidad de que saque la licuadora en el caso de no haya sido eliminado en la extracción de los primeros 9 boletos.

$$P_{10} = \frac{P_f}{P_{(100-(10-1))}} = \frac{1}{91} = 0.01098$$

Como se puede ver, sí funciona la fórmula.

Ahora, calculemos la probabilidad de que mi boleto no sea eliminado en la extracción de los primeros *19* números. Esto se obtiene al restar a uno la suma de las probabilidades de que salga mi número en las *19* extracciones.

$P_{1-19} = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{19}) = 1 - 0.209 = 0.790$

Tengo *0.790* probabilidades de concursar por el segundo premio.

Con esta probabilidad y la fórmula que me permite calcular la probabilidad de que mi boleto sea seleccionado en la vigésima extracción podré calcular las probabilidades que tengo de ganar una lavadora.

Primero, calculo la probabilidad de sacar la lavadora si no me han eliminado en las primeras 19 extracciones.

$$P_{20}=\frac{P_f}{P_{(100-(20-1))}}=\frac{1}{81}=0.01234$$

Ahora, ésta probabilidad la multiplico por la probabilidad de ser eliminado en las *19* extracciones:

P_{20} *x* $P_{1\text{-}19}$ *=0.01234 x 0.790 = 0.0097*

La probabilidad de que me saque la lavadora con un boleto es de 0.0097 o 0.97%

De la misma manera, calculo la probabilidad de que me eliminen en la extracción de los 29 primeros números y esa probabilidad la multiplico por la probabilidad de sacar el primer premio sin que haya sido eliminado:

$$1-\left(P_1+P_2+\ldots P_{29}\right)\times\left(\frac{p_f}{P_{(100-(30-1))}}\right)=1-(0.340)\times\left(\frac{1}{71}\right)=0.659\times0.0140=0.0092$$

La probabilidad de que saque la televisión y los *5* mil pesos es de *0.0092* o el 0.9%, menos del *1%*

La probabilidad de que me saque cualquiera de los tres premios con un boleto es igual a la suma de las tres probabilidades.

P_t*=.0092+0.0097+0.0099=0.0288*

Esto expresado en porcentaje será 2.88%

¿Y qué gana el organizador de la rifa?

Hagamos algunas cuentas. Si cada boleto se vendió en 500 pesos y sólo se vendieron 70 boletos, el organizador obtuvo: 35,000 pesos.

Sus gastos fueron los siguientes:

Impresión de boletos:	*100.00*
Licuadora	*380.00*
Lavadora	*2,600.00*
Televisión	*6,800.00*
Premio en efectivo	*5,000.00*
Tómbola	*300.00*
Gasto total	*15,180.00*

Ingresos – Egresos = Utilidad

35,000 – 15,180 = 19,820

Si los vendedores fueran honrados, de esta cantidad deberían pagar el impuesto de rifas y sorteos.

No estuvo tan mal, pero además los 30 boletos que no se vendieron también participaban en el sorteo, lo que implica que el organizador jugó en la rifa con 30 boletos, y sus probabilidades de obtener los premios son las siguientes:

Probabilidad de obtener una licuadora:

La probabilidad de sacarme la licuadora con 30 boletos es igual a la probabilidad de tener un boleto, pero multiplicada por 30.

30 x 0.0099 = 0.297

Probabilidad de sacar una lavadora será:

30 x 0.0097 = 0.291

Probabilidad de sacar el primer premio

30 x 0.0092 = 0.276

Como pueden ver nuestros queridos lectores, las rifas no son un mal negocio y, desde luego, saber algo de probabilidad tampoco.

Nota:

Agradezco las observaciones y correcciones a este artículo de mi estimado amigo el Ing. Fausto Ramón Castaño.

LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Jueves 9. Si el número *2010* se escribe en la forma:

$$1-2+3-4+\ldots+(n-2-(-1)+n,$$

¿Cuánto vale la suma de los dígitos de n?

Martes 21. ¿Cuántos números positivos de *6* dígitos tienen al menos un dígito igual a *7*?

Miércoles 29. Determina el número de enteros a entre *1* y *100* inclusive, tales que a^a es un cuadrado perfecto.

Educación y Desarrollo

Matemáticas para todos. Año 11, número 103, septiembre de 2010. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. **E-mail**: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx