EN ESTE BOLETÍN:

MATEMÁTICAS PARA TODOS

FMED
Educación y Desarrollo

Año 12, Número 111, junio de 2011

EL PROBLEMITA

De la sección de Martin Gardner publicada en la revista *Scientific American* presento el siguiente problema:

La señora Pita, una gran fumadora durante muchos años, finalmente ha decidido dejar de fumar. "Acabaré los veintisiete cigarrillos que me quedan y jamás volveré a fumar". La costumbre de la señora era fumar exactamente dos tercios de cada cigarrillo. No tardó mucho en descubrir que con ayuda de una cinta engomada podía pegar tres colillas y hacer otro cigarrillo. Con 27 cigarrillos ¿cuántos cigarrillos puede fumar antes de abandonar el tabaco para siempre?

BASES PARA USAR EL ÁLGEBRA

Para usar y aplicar el álgebra se requiere saber: *hacer operaciones, simplificar al mínimo los conjuntos de letras y números y por último, despejar una variable.* Estos tres elementos, en apariencia simples, nos permiten usar el álgebra en casi todas las ciencias y las actividades cotidianas. Por este motivo dedicaré este boletín a tratar estos tres temas, sin dejar de aclarar que el álgebra es mucho más que estas tres actividades.

OPERACIONES CON LETRAS Y NÚMEROS

Las operaciones con letras, números o con ambos se ejecutan respetando las propiedades o leyes de las operaciones aritméticas:

a) Ley Conmutativa
b) Ley asociativa
c) Ley distributiva
d) Leyes de los sigilos

Ley conmutativa

Esta ley establece que sin importar el orden en que se coloquen los elementos de las sumas o multiplicaciones, el resultado será el mismo.

Por ejemplo:

$$3+8=11=8+3$$
$$(5)(12)=60=(12)(5)$$
$$(c)(d)=(d)(c)$$
$$4(a)+7(b)=7(b)+a(4)$$

El orden de los sumandos o factores no altera el resultado.

Ley asociativa

Establece que sin importar qué se calcule primero en una expresión, el resultado será el mismo.

Por ejemplo:

$$7+3-6=(7+3)-6=(7-6)+3=(3-6)+7=4$$
$$a+b-c=(a+b)-c=(a-c)+b=(b-c)+a$$

Implica que se pueden realizar operaciones parciales.

Ley distributiva

Un conjunto de elementos sumados y multiplicados por un factor es igual que la suma de cada sumando multiplicado por el factor.

$$(7+4)5=(7)(5)+(4)(5)=55$$
$$(11)(5)=35+20=55$$
$$(a+b)c=(a)(c)+(b)(c)$$
$$(a+b)5=(a)5+5(b)$$

- ✓ En este caso la suma de *7* y *4* es multiplicada por *5*. Éste último es el factor.
- ✓ En el segundo ejemplo los sumandos son *a* y *b* y el factor es *c*.

Con esta ley podemos señalar que, cuando existe un factor que afecta a varios elementos de una expresión, el resultado se pude obtener separando a cada elemento de la expresión y afectándolo por el factor.

Leyes de los signos

Ya que las expresiones algebraicas son números o letras unidas por signos, debemos conocer las *leyes de los signos* y éstas se obtienen del uso de las operaciones básicas: **(+), (−), (x)** y **(÷)**

> **"Siempre hay tiempo para que los viejos aprendan."**
> *Aquiles*

“Los tres fundamentos del aprendizaje: mirar mucho, sufrir mucho y estudiar mucho.”
Paul Catherall

Adición	(+)+(+)=+ (−)+(−)=− (+3)+(+5)=+8 (−3)+(−5)=−8	Sumas de cantidades con signos iguales se suman y dan una cantidad con el signo de dichas cantidades.
	(+)+(−)=+ ó − (+3)+(−5)=(+3)−(5)=−2	Sumas de cantidades con signos diferentes se restan y dan una cantidad con signo + ó −, dependiendo del signo del número de mayor valor absouto.
	(−)+(+)=+ ó − (−3)+(+5)=+2	
Sustracción	(+)−(+)=+ ó − (−)−(−)=+ ó − (+3)−(+5)=+3−5=−2 (+5)−(+3)=+5−3=+2	Restas de cantidades con signos iguales se restan y dan una cantidad con signo + ó − dependiendo del signo del número de mayor valor absouto.
	(+)−(−)=+ (−)−(+)=− (+3)−(−5)=(3)+(5)=+8 (+5)−(−3)=(5)+(3)=+8 (−3)−(+5)=−3−5=−8 (−5)−(+3)=−5−3=−8	Restas de cantidades con signos diferentes se suman y dan una cantidad con el signo + ó − dependiendo del signo de la cantidad a la cual se está restando.
Multiplicación y división	(+)x(+)=+ ó (+)/(+)=+ (−)x(−)=+ ó (−)/(−)=+ (6)x(3)=18 ó (6)/(3)=2 (−6)x(−3)=18 ó (−6)/(−3)=2	Multiplicaciones o divisiones de cantidades con signos iguales dan una cantidad con signo positivo
	(+)x(−)=− ó (+)/(−)=− (−)x(+)=+ ó (−)/(+)=− (6)x(−3)=−18 ó (6)/(−3)=−2 (−6)x(3)=−18 ó (−6)/(3)=−2	Multiplicaciones o divisiones de cantidades con signos diferentes dan una cantidad con signo negativo.

Toda esta perorata se puede simplificar en la sigue tabla:

Multiplicación y división	Signos iguales dan signo positivo Signos diferentes dan signo negativo (+)x(−)=− ó (+)/(−)=− (−)x(+)=+ ó (−)/(+)=−
Adición y sustracción	(+)+(+)= se suman y tienen signo positivo (−)+(−)= se suman y tienen signo negativo (+)+(−)=Se restan y tienen el signo del mayor (+)−(+)=Se restan y tienen el signo del mayor (−)−(−)= Se restan y tienen el signo del mayor (+)−(−)=Se suman y tienen signo positivo (−)−(+)=Se suman y tienen signo negativo

Aprender a usar los signos es parecido a aprender a nadar o montar bicicleta. Estos sólo se aprenden nadando o motando la bicicleta, es decir, *usándolos*.

La excepción a lo anterior es que en las matemáticas es necesario entender el porqué de las cosas y en la natación o la bicicleta esto no es necesario. Así, a continuación trataré de explicar el porqué de las leyes de los signos.

Al entender el porqué de las leyes de la multiplicación podremos deducir los porqués de las otras operaciones.

La multiplicación se define como una extensión de la suma, esto porque la multiplicación es la repetición de un número *n* veces.

$$8 \times 7 = 8+8+8+8+8+8+8=56$$

En este caso, se repite *siete* veces el *ocho* y *si todos sus números son positivos se tiene un número positivo, o sea, sumamos siete veces ocho*.

En el caso de que repitamos *n* veces un número con signo negativo, tendremos lo siguiente:

(−8) x 7=−8−8−8−8−8−8−8=−56. Esto porque tenemos siete veces −8.

Y como la multiplicación es conmutativa tenemos que *(+) x (−) = (−) x (+)*:

$$(-8) \times (7) = (7) \times (-8) = -56$$

Si los términos se mostraran de la siguiente manera (−7) x (8) se tendrían que sumar *ocho* veces menos *siete*:

$$(-7) \times 8=-7-7-7-7-7-7-7-7=-56.$$

El caso de *menos por menos* (−) x (−) requiere un poco más de reflexión, ya que es necesario usar también la propiedad distributiva. Observe el siguiente ejemplo:

$$(-3) \times (-4) = 12$$

El −3 se puede obtener de: *(10−13)=−3*

Usando la propiedad distributiva podemos hacer lo siguiente:

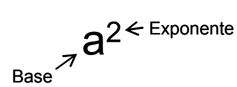
$$(10-13)(-4) = (10)(-4) + (-13)(-4) = (-40) + (52) = -40+52 = 12$$

Aún cuando el camino fue muy largo, se observa que el resultado es el mismo que con dos números negativos, no obstante de que partimos de números con signos diferentes *(10−13)*.

El uso adecuado de los signos se aprende con mucha práctica y siempre revisando varias veces.

Sólo nos falta mencionar los exponentes y radicales.

Un exponente indica el número de veces que debe ser multiplicado por sí mismo el número que lo porta. Al número que lo porta se le llama base.



Al aplicar esta definición de exponente, podremos resolver las siguientes operaciones:

$3*3*3*3=81=3^4$

$a*a*a*a=a^4$

$2(3)*2(3)*2(3)*2(3)=(2)^4*(3)^4=(2*3)^4=(6)^4=1296$

$2(a)*2(a)*2(a)*2(a)=(2)^4*(a)^4=(2*a)^4=16a^4$

En los exponentes existen algunas reglas elementales. De manera simplificada, éstas son:

1. Un exponente es el número de veces que se debe multiplicar por sí misma a la base, esto se puede expresar de la siguiente manera:
   $1^2 = 1 \times 1 = 1$; $\quad 1^n = 1x1x1\ldots n$
2. Cuando una letra o número no tiene exponente es como si tuviera el número uno:
   $a = a^1$; $\quad 5 = 5^1$; $\quad x = x^1$.
3. Para realizar una suma o resta de bases con exponentes, se aplica la ley asociativa, por lo que deben hacerse las operaciones de cada uno de los términos iguales. *Cuidado: en este caso los exponentes no se pueden sumar ni restar.*
   $a^2 + b^3 = (a \times a) + (b \times b \times b)$
   $3^2 + 4^3 = (3 \times 3) + (4 \times 4 \times 4) = 75$
4. Cuando se multiplican dos bases iguales con exponentes, el resultado será la base elevada a la suma de los exponentes.
   $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^5$
   $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^{2+3} = 4^5 = 80$
5. Cuando se dividen dos bases iguales con exponentes, el resultado será la base elevada a la resta de los exponentes.
   $\frac{a^4}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^{4-3} = a$; $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad \frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3$
6. Cuando se eleva a una letra o número que ya tienen un exponente; el resultado será esa misma letra o cantidad elevada al producto de los exponentes.
   $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6$
   $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$
   $(a^m)^m = a^{m \times n}$
   $(3^2)^3 = 3^{2x3} = 3^6 = 729$

Los radicales

La palabra "radical" deriva del vocablo latino *radiz* que significa "raíz". Los radicales son la operación inversa a los exponentes y se expresan de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ en donde } a = b^n$$

Con esto puedo decir que si saco la raíz enésima de ***a*** obtengo ***b*** y que si elevo a ***b*** a la *enésima* potencia obtengo ***a***. Con ello podemos ejecutar operaciones y despejar los números o letras con raíces o exponentes. Observe como despejamos una literal del siguiente problema.

Si conocemos la superficie de un círculo. *¿Cómo puedo conocer su radio?*

$$\pi . r^2 = a$$

De esta fórmula debo dejar sola a ***r*** en un lado de la ecuación.

Primero divido entre π a los dos lados de la ecuación. Con ello no se altera la ecuación.

$$\frac{\pi . r^2}{\pi} = \frac{a}{\pi}$$

Ahora bien, para quitarle a ***r*** el exponente 2, utilizamos su operación inversa, es decir, sacamos la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación:

$$r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

Los radicales se pueden expresar como exponentes y ello nos permite deducir algunas de sus propiedades. Observe los siguientes ejemplos:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{n}{p}}$$

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$$

$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

Como se puede observar, con esta propiedad se pueden simplificar los radicales.

$$\sqrt[n]{a*b} = (a*b)^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{n}} * (b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[2]{6x^2 y} = (6 * x^2 * y)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} * x^{\frac{2}{2}} * y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{6} * x * \sqrt[2]{y} = x\sqrt{6*y}$$

Observe que en la última raíz no pusimos el cuadrado. Lo que es común en las raíces cuadradas.

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES Y DESPEJE DE VARIABLES

La simplificación de una expresión se logra al realizar todas las operaciones que en ella se plantean, y el despeje de una variable implica dejarla sola en uno de los miembros de la ecuación. A continuación presento algunos ejemplos.

Simplificación de expresiones

$$2a + 3a + 5a - 15a - 5a = -10a$$

$$a(2 + 3 + 5 - 15 - 5) = a(-10) = -10a$$

Observe que se usaron dos de las leyes de las matemáticas.

Otros ejemplos:

> **"La lectura forma al hombre; las conferencias lo alistan; y la escritura lo perfecciona."**
> *Francos Bacon*

$$(x+2)(x+2)=x(x+2)+2(x+2)=x^2+2x+2x+4=x^2+4x+4$$

Pero si aplicamos las reglas de los exponentes tendremos lo siguiente:

$$(x+2)^1(x+2)^1=(x+2)^{1+1}=(x+2)^2$$

La reducción de expresiones se conoce como factorización y a continuación se dan tres ejemplos:

$$3x^2-6x+9x^4=3x(x-2+3x^3)$$

$$\frac{a^2}{4}-\frac{4b^2}{9}=\left(\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}\right)$$

$$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$$

En el último ejemplo debemos tener en cuenta que:

$$(x+1)^2=(x+1)(x+1)=x^2+2x+1$$

El despeje de variables

Para dejar sola a una variable, es necesario mover a todos los monomios que se encuentren en el miembro en que se encuentra la variable al otro miembro de la ecuación.

A continuación se presentan algunos ejemplos de despeje de variables.

Despejar ***c*** de la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Dado que ***c*** está dividida entre ***d*,** multiplico en ambos miembros de la ecuación por *d*. Con ello no se altera la igualdad y despejo a *c*.

$$\frac{a*d}{b}=\frac{c*d}{d}=c$$

$$c=\frac{a*d}{b}$$

En caso de que tuviera que despejar *d*, describo cada uno de los pasos:

1. *Debido a que **d** se encuentra en el denominador del 2º miembro y que para despejarla requiero que se encuentre en el numerador, hago lo siguiente: como d está dividiendo, multiplico a los dos miembros por **d** y con ello desaparece del 2º miembro y aparece en el primero como en el numerador.*
2. *Como **b** está dividiendo en el primer miembro para pasarlo al segundo, multiplico a los dos miembros por **b** y con ello desaparece del 1er miembro y queda en el segundo.*
3. *Sólo me resta mover a **a** del 1er miembro y dado que está multiplicando, divido a los dos miembros entre **a** y ya está.*

   Esto se desarrolla de la siguiente manera.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a*d}{b}=\frac{c*d}{d};\frac{a*d}{b}=c;\frac{a*d*b}{b}=c*b;a*d=c*b$$

$$\frac{a*d}{a}=\frac{c*b}{a};d=\frac{c*b}{a}$$

Un último ejemplo. Despejar x del siguiente polinomio:

$$x^2+2y-15=40$$

1. *Dado que 15 tiene signo negativo, sumo 15 en los dos miembros:*

$$x^2+2y-15+15=40+15$$

$$x^2+2y=55$$

2. *Como **2y** está sumando en el primer miembro y quiero eliminarla de éste y que aparezca en el 2º, resto en los dos miembros **2y**.*

$$x^2+2y-2y=55-2y$$

$$x^2=55-2y$$

3. *Para que x aparezca sin el cuadrado se debe sacar raíz cuadrada al segundo miembro.*

$$x^2=55-2y$$

$$x=\sqrt{55-2y}$$

Con lo anterior, pueden ver nuestros queridos lectores que el álgebra no es otra cosa más que la extensión de la aritmética pues todo lo que se hace con los números lo podemos hacer con las letras.

LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Miércoles 8. ¿Cuáles de los números: 2, 3, 5, 7 y 11 no son divisores de 371^4-41^4?

Martes 14. ¿Cuántos dígitos tiene el número $32^{16}\ x\ 125^{25}$?

Viernes 17. La suma de 20 números enteros es 200. De éstos, ¿cuál es la mayor cantidad de números que pueden ser mayores que 20?

Jueves 23. Los enteros ***a*** y ***b*** son mayores a *1* y su producto es *2010*. Si ***a*** es par ¿cuál es el mayor valor posible para ***a***?

Matemáticas para todos. Año 12, número 111, junio de 2011. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.
E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Educación y Desarrollo