EN ESTE BOLETÍN:

MATEMÁTICAS PARA TODOS

Educación y Desarrollo

Año 12, Número 114, octubre de 2011

INTRODUCCIÓN AL TEMA

En nuestro boletín anterior, presenté a las matrices como un arreglo de números reales, dispuestos en filas y columnas, que se utilizan como una herramienta matemática para tratar los números que deben estar ordenados. Ahora, las presentaré como herramienta para encontrar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, será necesario recordar dos elementos del álgebra: 1) Qué es un sistema de ecuaciones lineales, y 2) Cuáles son los procedimientos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal es aquella que, al graficarla en un plano cartesiano, nos da una recta. Por ejemplo: Se reparten 78 canicas entre tres grupos de niños. Al segundo se le dan tres veces más de lo que se dio al primero, y al tercero se le dan 6 menos que al segundo. ¿Cuántas canicas se le dieron a cada grupo?

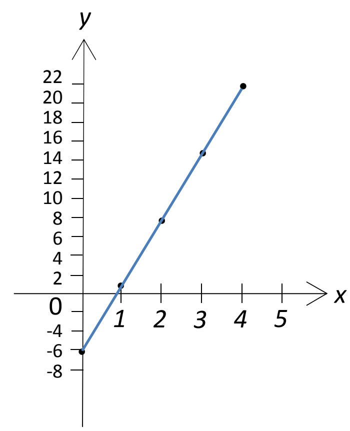
El planteamiento de la ecuación parte al establecer nuestras variables ***y*** y ***x***. La variable que depende del número de canicas que se repartieron en los tres grupos es *78* y se designa como *y*. En este caso ***y=78*** canicas. La variable que siempre es la misma en la ecuación y que cambia en función del número de canicas que se dieron al primer grupo es la ***x***. Con ello, se puede plantear la siguiente ecuación:

Al reducir la ecuación a su mínima expresión, tendremos:

$$7x - 6 = y$$

Si graficamos esta ecuación tabulando con diferentes valores de "equis" tendremos lo siguiente:

X	Y
0	-6
1	1
2	8
3	15
4	22



ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Ahora analicemos cuando tenemos dos ecuaciones lineales en las que, en un punto, los valores de sus variables ***(x y)*** son los mismos.

En el mercado de San Ángel, Don Agustín tiene un puesto de zapatos y huaraches, una vez a la semana hace cuentas de sus ventas. En la primer semana de septiembre, vendió *12* pares de huaraches y *19* de zapatos, en esa semana cobró en total *2,690* pesos. En la segunda semana, vendió *22* pares de huaraches y *16* de zapatos y cobró *2,860* pesos. ¿Cuáles son los precios de un par de huaraches y de un par de zapatos?

Supongamos que los huaraches los representamos con la ***x*** y a los zapatos con ***y***, con esto podemos plantear las siguientes ecuaciones:

12x + 19 y = 2,690------------------1
22x + 16 y = 2,860------------------2

"El experimentador que no sabe lo que está buscando, no entenderá lo que encuentra."

Claude Bernard

"Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión, de dudar de cualquier afirmación y de corregir errores."

Julius Robert Oppenheimer

Ambas ecuaciones son lineales y se les llama ecuaciones simultáneas, ya que los valores de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ deben ser los mismos en las dos ecuaciones. Existen varios métodos para resolver estas ecuaciones, a continuación plantearé uno de los más comunes, el de eliminación. Éste consiste en eliminar una de las variables al multiplicar o dividir a los dos miembros de cada ecuación para que, al sumar ambas ecuaciones, una de sus variables ($\boldsymbol{x}$ ó $\boldsymbol{y}$) se elimine.

Si multiplico a los dos miembros de la primera ecuación por 16 y a los de la segunda por – 19, obtendré lo siguiente:

$$16(12x+19y)=16(2{,}690)$$
$$192x+304y=43{,}040\text{---------------}1$$
$$-19(22x+16y)=-19(2{,}860)$$
$$-418x-304y=-54{,}340\text{-----------}2$$

Al colocar de nuevo juntas las dos ecuaciones, tengo:

$$192x+\cancel{304y}=43{,}040\text{-------------}1$$
$$-418x-\cancel{304y}=-54{,}340\text{-----------}2$$

Como se puede ver, al sumar las dos ecuaciones las "*yes*" se eliminan y se obtiene la siguiente ecuación y resultado:

$$-226x=-11{,}300$$
$$x=\frac{-11{,}300}{-226}=50$$

Con esto sabemos que un par de huaraches (x) valen 50 pesos. Al sustituir este valor en cualquiera de las dos ecuaciones originales, podremos obtener el valor de los zapatos (y).

Si se sustituye x= 50 en la ecuación 1, tendremos lo siguiente:

$$12(50)+19y=2{,}690$$

Despejamos $\boldsymbol{y}$:

$$y=\frac{2{,}690-600}{19}=\frac{2{,}090}{19}=110$$

Los zapatos valen 110 pesos. Para comprobar los resultados podemos sustituir el valor de los huaraches y el de los zapatos en cualquiera de las dos ecuaciones.

Sustituimos a $\boldsymbol{x}$= *50* y a $\boldsymbol{y}$=*110* en la ecuación 2:

$$22(x)+16(y)=2{,}860$$

$$22(50)+16(110)=1{,}100+1{,}760=2{,}860$$
$$2{,}860=2{,}860$$

Se cumple la igualdad, por lo tanto la ecuación está bien.

Ahora, solucionemos estas mismas ecuaciones utilizando el método gráfico. Para esto, debemos presentar a las ecuaciones con $\boldsymbol{y}$ como variable dependiente y a $\boldsymbol{x}$ como variable independiente tal como se muestra a continuación.

Despejando a $\boldsymbol{y}$ en la ecuación *1:*

$$12x+19y=2.690$$
$$19y=2{,}690-12x$$
$$y=\frac{2{,}690-12x}{19}$$
$$y=\frac{2{,}690}{19}-\frac{12x}{19}$$
$$y=141.58-0.632x\text{-----------}1$$

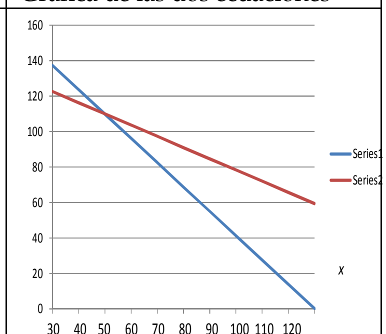
Despejando a $\boldsymbol{y}$ de la ecuación *2*:

$$22x+16y=2.860$$
$$16y=2{,}860-22x$$
$$y=\frac{2{,}860-22x}{16}$$
$$y=\frac{2{,}860}{16}-\frac{22x}{16}$$
$$y=178.75-1.37x\text{---------}2$$

Ahora, hagamos una tabulación en las dos ecuaciones para los siguientes valores de $\boldsymbol{x}$: 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120.

Ecuación 1		Ecuación 2	
x	*y*	*x*	*y*
30	*138*	*30*	*123*
40	*124*	*40*	*116*
50	*110*	*50*	*110*
60	*97*	*60*	*104*
70	*83*	*70*	*97*
80	*69*	*80*	*91*
90	*55*	*90*	*85*
100	*42*	*100*	*78*
110	*28*	*110*	*72*
120	*14*	*120*	*66*
130	*1*	*130*	*59*

Gráfica de las dos ecuaciones



Nota: Para lograr la coincidencia se utilizaron cantidades cerradas a números enteros.

Como pueden observar los valores en los que Como pueden observar, los valores en los que coinciden las dos ecuaciones son:

Huaraches $\boldsymbol{x}$**= 50**
Zapatos $\boldsymbol{y}$**= 110**

“La estadística es una ciencia que demuestra que si mi vecino tiene dos coches y yo ninguno, los dos tenemos uno.”

George Bernard Shaw

USO DE LOS DETERMINANTES EN LAS ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Si colocamos los elementos de las ecuaciones simultáneas en orden (esto es, primero las x luego las y luego las c) podremos armar varios determinantes (matrices) con los cuales podremos encontrar la solución de las ecuaciones simultáneas. Esto se debe a las siguientes operaciones aritméticas.

Supongamos que tenemos dos ecuaciones lineales con el siguiente ordenamiento:

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{--------------1}$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \text{--------------2}$$

Si multiplicamos a la ecuación *1* por *(b_2)* y a la ecuación *2* por *($-b_1$)*, tendremos lo siguiente:

$$b_2(a_1x + b_1y) = b_2c_1 \text{-----------1}$$
$$-b_1(a_2x + b_2y) = -b_1c_2 \text{-------2}$$

Al realizar las operaciones las ecuaciones terminaran con la siguiente configuración:

$$b_2a_1x + \cancel{b_2b_1y} = b_2c_1 \text{--------------1}$$
$$-b_1a_2x + \cancel{-b_1b_2y} = -b_1c_2 \text{--------2}$$

Como pueden ver, la $\boldsymbol{y}$ se eliminó, tal como lo hicimos en el método de solución de ecuaciones simultáneas por eliminación, y nos queda una función como la siguiente:

$$b_2a_1x - b_1a_2x = b_2c_1 - b_1c_2$$
$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2$$
$$x = \frac{(b_2c_1 - b_1c_2)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

Para obtener el valor de la y, haríamos lo siguiente:
Multiplicamos los dos términos de la ecuación *1* por *a_2* y los dos términos de la ecuación *2* por *$-a_1$* , y obtenemos lo siguiente:

$$a_2(a_1x + b_1y) = a_2c_1 \text{---------------1}$$
$$-a_1(a_2x + b_2y) = -a_1c_2 \text{-----------2}$$

Al realizar las operaciones obtenemos:

$$a_2a_1x + a_2b_1y = a_2c_1 \text{---------------1}$$
$$-a_1a_2x - a_1b_2y = -a_1c_2 \text{------------2}$$

Los términos con x se anulan y las ecuaciones quedan así:

$$a_2b_1y - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2$$
$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$$
$$y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Estas ecuaciones son muy importantes ya que el numerador y el denominador son la solución de los determinantes que se pueden formar con los componentes de las ecuaciones simultáneas. Así se puede establecer un procedimiento para resolver sistemas de con este tipo ecuaciones. A este procedimiento se le llama la regla de Cramer. Observe lo siguiente:

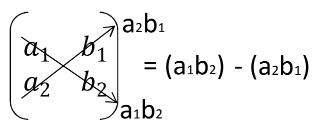
De las ecuaciones originales podemos plantear los siguientes determinantes:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Con cada literal (*a*, *b* y *c*) de las variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{c}$ se arman los siguientes determinantes, observe que se respeta el orden de los componentes.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La solución de los determinantes cuadrados se obtiene al multiplicar en diagonal los términos de arriba hacia abajo, de izquierda a derecha, y restar la multiplicación de los términos de abajo hacia arriba, de izquierda a derecha. Esto se puede observar en el siguiente diagrama.



Como se puede observar, la solución del determinante planteado con las literales de las variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ de las dos ecuaciones simultáneas es la misma que el denominador de nuestra solución para las *equis* de las ecuaciones. A este determinante le llamaremos Δ (delta).

Con la misma lógica, podemos decir que el determinante que nos permite conocer el valor de la variable $\boldsymbol{x}$ es el que resulta de sustituir las literales de la variable y por las de los términos independientes. Esto se observa en el siguiente diagrama.

Y si quisiéramos obtener el determinante de que nos ayudaría a obtener el valor de la variable $\boldsymbol{y}$ tendríamos lo siguiente:

> **"La estadística es una ciencia según la cual todas las mentiras se tornan cuadros."**
> *Pitrigilli*

[redacted]

De este modo, podemos plantear la regla de Cramer para solucionar ecuaciones simultáneas.
Dadas las ecuaciones simultáneas:

Para obtener el valor de la x que satisface las dos ecuaciones se procede a formar un determinante cuadrado sustituyendo las literales de las y por los de las c. El resultado se divide entre el determinante Δ (delta). En idioma matemático esto se verá así:

$$\frac{\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = x$$

Al solucionar los determinantes tendremos:

Para obtener el valor de la y que solucione las dos ecuaciones hacemos lo siguiente:

$$\frac{\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = y$$

Al solucionar los determinantes tendremos:

Usemos la regla de Cramer en la ecuación que obtuvimos del problema de Don Agustín en su puesto de huaraches y zapatos.

12x + 19 y = 2,690------------------1
22x + 16 y = 2,860------------------2

Primero se calcula el determinante delta (Δ)

$$\Delta = \begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 22 & 16 \end{pmatrix} = (12)(16)-(22)(19)=192-418=-226$$

Ahora calculamos x, sustituyendo los números de las x por los de las c y dividiendo el resultado de ese determinante entre el determinante Δ.

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 12 & 2{,}690 \\ 22 & 2{,}860 \end{pmatrix}}{-226} = \frac{(12)(2{,}860)-(22)(2{,}690)}{-226}$$

$$x = \frac{(34{,}320)-(59{,}180)}{-226} = \frac{-24{,}860}{-226} = 110$$

Al formar el determinante sustituyendo los números de las x por los de las c y dividiendo el resultado entre el resultado del determinante Δ, obtendremos el valor de la y.

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 2{,}690 & 19 \\ 2{,}860 & 16 \end{pmatrix}}{-226} = \frac{(2{,}690)(16)-(2{,}860)(19)}{-226}$$

$$y = \frac{(43{,}040)-(54{,}340)}{-226} = \frac{-11{,}300}{-226} = 50$$

Como pueden ver nuestros queridos lectores, los resultados son los mismos que habíamos obtenido arriba.
Con los determinantes y la regla de Cramer se pueden resolver sistemas con una gran cantidad de ecuaciones simultáneas, hecho que facilita el cálculo en muchas de las ciencias e investigaciones en las que se obtienen este tipo de ecuaciones.

Los problemas del calendario

Lunes 3. Se tiene un contenedor cúbico de *30 cm* de lado. Si se le vertieran 14.4 litros de agua, ¿a qué altura llegaría el agua?
Miércoles 12. Pablo tiene que darle $10 a Mario y para ello tiene suficientes monedas de $1, $2, y $5. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
Viernes 28. Si el perímetro de un rectángulo es *16a + 18b* y el ancho es *2a + 6b*, ¿cuál es su largo?

FMED Educación y Desarrollo

Matemáticas para todos. Año 12, número 114, octubre de 2011. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.
E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx