Educación y Desarrollo

Año 12, Número 117, febrero de 2012

MATEMÁTICAS PARA TODOS

EN ESTE BOLETÍN:

LAS ECUACIONES

En todas las ciencias, y en muchas de nuestras actividades diarias, usamos las ecuaciones para definir las operaciones a realizar con algunos datos para obtener un resultado. Una ecuación son dos conjuntos de números, literales y operaciones que se agrupan a cada lado un signo de igual. Esto implica que el conjunto de operaciones de un lado debe dar un resultado igual al del otro.

De acuerdo con el diccionario de matemáticas Collins una ecuación es:

"Una fórmula con dos expresiones separadas por un signo de igual, lo que implica que éstas tienen el mismo valor o son idénticas."

Las ecuaciones se pueden obtener por muchos medios, sin embargo, estas siempre surgen al analizar lo que se debe hacer para obtener un resultado. Esto significa que si se conoce lo que se debe hacer, y ello se puede expresar por medio de operaciones, es posible formular una ecuación.

FORMULACIÓN DE ECUACIONES

Suponga que usted va a alquilar una casa y que quiere recibir, después de pagar los impuestos, 16,000 pesos cada mes. ¿Qué ecuación deberá usar para calcular la renta a cobrar para obtener dicha cantidad?

Para formular una ecuación que nos funcione con diversos montos de retenciones e impuestos es necesario conocer los factores que influyen en el resultado final de nuestro problema.

Demos algunos nombres a las variables que pueden influir en el resultado:

r = Renta que se debe cobrar cada mes.

d = Deducciones que se pueden hacer de la renta cobrada.

i = El porcentaje que se debe pagar sobre lo que queda después de hacer las deducciones.

p = Producto final de la renta después de impuestos.

Ahora, analicemos lo que debemos hacer para obtener el resultado:

1. Debemos estar conscientes de que a la renta cobrada (r) le debemos restar una cantidad A de impuestos. Con ello obtendremos el producto final de la renta (p) después de pagar los impuestos. Esto es: $p = r - (A)$
2. Para calcular (A), primero es necesario definir la cantidad a la que se aplicará el impuesto (i). Ésta se conoce como cantidad gravable y se calcula quitándole a la renta (r), lo que nuestra querida oficina de Hacienda nos permite deducir de la renta (d). Esto se puede plantear así: ($r - r\,d$)
3. Como sobre la cantidad gravable se aplica el impuesto (i), tendremos que $A=i(r-rd)$. Al sustituir A en la ecuación del punto uno, obtenemos: $p = r - (i(r-rd))$

Al factorizar, simplificamos la ecuación para calcular el producto final de nuestra renta:

$$p = r-(ir(1-d)) = r(1-(i(1-d)))$$

Supongamos ahora que Hacienda establece que la deducción d es de *35%*; que el impuesto por renta i es *30%* y que se le ocurre a usted, sólo cobrar de renta r *17,000* pesos de renta. Veamos cuál será su ingreso al sustituir estas variables en nuestra ecuación.

$$p = r(1-(i(1-d)))$$
$$p=17,000(1-((0.30)(1-0.35))$$
$$p=17,000(1-(0.30)(0.65))$$
$$p=17,000(0.805)$$
$$p=13,685$$

> **"La lógica es buena para razonar, pero mala para vivir."**
> *Remy de Gourmont*

> **“Raro y celestial don, el que sepa sentir y razonar al mismo tiempo”**
>
> *Vittorio Alfieri*

Lo que nos indica que sólo quedaron ***13,865*** pesos al mes, y usted quiere **16,000**.
Para conocer cuánto se debe cobrar para obtener *16,000* pesos, después de impuestos, es necesario hacer que en nuestra ecuación el producto (***p***) sea de ***16,000*** pesos y despejar la renta ***r***, que es lo que queremos recibir. De esta forma tenemos:

$$p = r(1-(i(1-d)))$$
$$16{,}000 = r(1-((0.30(1-0.35)))$$
$$16{,}000 = r(1-(0.30)(0.65))$$
$$16{,}000 = r(1-(0.195))$$
$$16{,}000 = r(0.805)$$
$$r = \frac{16{,}000}{0.805} = 19{,}875.78 \; pesos$$

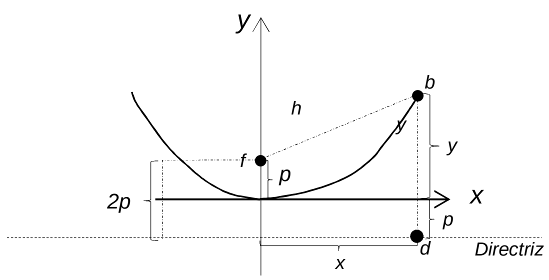
Así que usted debe cobrar ***19,875.78*** pesos para que le queden ***16,000*** pesos libres.
La formulación de ecuaciones se puede dar en la teoría, como cuando se deduce la ecuación de una figura cónica, o en acciones prácticas con las que podemos contestar cuestionamientos o dudas específicas.

ECUACIONES TEÓRICAS

Analicemos cómo se puede deducir la ecuación de una parábola. Para ello, lo primero que requerimos es conocer qué es dicha forma geométrica. Una parábola es:

El lugar geométrico que ocupan los puntos del plano que son equidistantes a un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.

En muchas ocasiones, las definiciones de los cuerpos geométricos por medio de palabras son complejas y no siempre se entienden, por ello, conviene auxiliarse de dibujos o croquis. En este caso lo haremos utilizado los ejes coordenados ya que con ellos el gran Rene Descartes (1596-1650) nos proporcionó una gran herramienta para deducir muchas ecuaciones de cuerpos o formas geométricas.



De acuerdo con la definición de parábola, la distancia *fb* = *h* debe ser igual que *bd*, lo que implica:

$$h = \overline{fb} = \overline{bd} = (y+p) \text{ --------------1}$$

Al observar el dibujo, nos damos cuenta de que ***x*** y ***(y – p)*** son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *h*. Por ello, con el teorema de Pitágoras podemos calcular *h*:

$$x^2 + (y-p)^2 = h^2 \text{ ——————2}$$

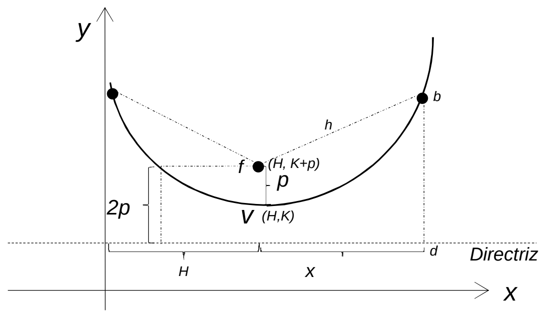
Al sustituir *1* en *2*, tenemos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

Para obtener una ecuación en su mínima expresión desarrollamos los cuadrados:

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$
$$2yp + 2yp = x^2$$
$$4py = x^2$$

Ésta es la ecuación de una parábola con su vértice en el origen.
Si la parábola tuviera su vértice en las coordenadas (K, K), se vería así:



Su ecuación sería la siguiente:

$$4y(K+p) = (x+H)^2$$

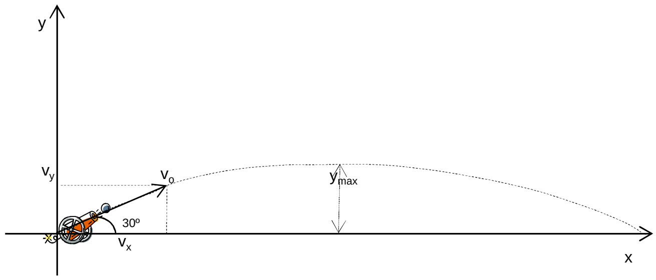
Les recomiendo que traten de llegar a este resultado por ustedes mismos. En caso de que no lograrlo, con gusto se los enviaré al solicitarlo por email a alfonso@aprendizaje.com.mx.

ECUACIONES EN LA PRÁCTICA

Podemos tener miles de ecuaciones pero si éstas no las podemos utilizar en nuestra vida diaria no nos servirán y es muy probable que los alumnos terminen por odiarlas. Así que analicemos la deducción de la ecuación de una parábola pero desde el punto de vista de un artillero.
Supongamos que se dispara una bala a una velocidad de 50 m/s (la bala recorre cincuenta metros en un segundo) y que el cañón está

apuntando hacia arriba a 30º como se observa en el siguiente croquis. El artillero se hace tres preguntas:

a) ¿Cuánto tiempo tardará en caer la bala?
b) ¿A qué distancia del cañón cae la bala?
c) ¿Cuál será la altura máxima de la bala?



La formulación de ecuaciones en muchas ocasiones parte de otras ecuaciones. Analicemos algunas ecuaciones que pueden ayudar al artillero para mejorar su puntería.

1. Ecuaciones de velocidad y de aceleración:

La velocidad media de un cuerpo es igual a la distancia recorrida (***d***) entre el tiempo utilizado para recorrer dicha distancia (***t***). Por ejemplo: si usted recorre los *74 km* (***d***) que hay entre la Ciudad de México y Cuernavaca en tres cuartos de hora (**t = *45 min***), su velocidad media o promedio (v_m) es de *98.66 km/h*, debido a las siguientes ecuaciones:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{74\ km}{45\ min} = 1.644\ {}^{km}/_{min}$$

$$= \frac{1.644\ km * 60\ \cancel{min}}{1\ \cancel{min} * 1\ h} = 98.66\ {}^{km}/_{h}$$

Aceleración gravitacional (*g*). Gracias a las sesudas observaciones de Galileo Galilei (*1564-1642*) y de Isaac Newton (*1643-1727*) se sabe que la altura de la que cae un cuerpo es igual a la aceleración gravitacional (*g*) multiplicada por el cuadrado del tiempo (***t***²) que tarda en caer, todo esto dividido entre dos. La ecuación que representa esto es:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

La aceleración gravitacional en condiciones normales es de *9.81 m/s²*.

El efecto de la gravedad en nuestra bala sólo se manifiesta en el eje ***y*** y ésta es negativa.

2. **Ecuaciones de velocidad en el sistema de ejes:**

La velocidad de la bala en el eje ***x*** es la proyección de v_0 en dicho eje, por lo tanto:

$$v_x = v_0 cosa$$

En el eje ***y***, la velocidad será la proyección de v_0 sobre el eje menos la velocidad producto de la aceleración gravitacional:

$$v_y = v_0\, sina - gt.$$

3. Ecuaciones de desplazamientos en los ejes *x* y *y*:

Dado que la velocidad media de un cuerpo es igual a la distancia recorrida entre el tiempo utilizado, se puede plantear que al despejar ***t*** tendremos: *t v =d*.

Con base en esta ecuación podemos establecer las ecuaciones del desplazamiento de la bala en los ejes ***x*** y ***y***:

El desplazamiento de la bala en el eje ***x*** es igual a la velocidad en ***x*** multiplicada por el tiempo:

$$x = v_0\ (cosa)\ (t)$$

El desplazamiento de la bala en el eje ***y*** es igual a la velocidad en el eje ***y*** multiplicada por el tiempo (***t***) menos el efecto de la fuerza de la gravedad $\left(\frac{gt^2}{2}\right)$:

$$y = v_0 \sin \propto * t - \frac{gt^2}{2}$$

Con estas ecuaciones se pueden encontrar las ecuaciones que necesita el artillero para responder sus preguntas.

a. Tiempo que tarda en caer la bala.

Como cuando la bala toca el suelo su altura es cero, debemos igualar la ecuación de desplazamiento vertical (*y*) a cero:

$$y = v_0 \sin \propto * t - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = v_0 \sin \propto * t - \frac{gt^2}{2}$$

Ya que la bala está en el suelo, despejemos el tiempo que hizo en llegar a ese punto:

$$\frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \propto * t$$

$$\frac{gt^{\cancel{2}}}{2\cancel{t}} = v_{0\,\sin\propto}$$

$$\frac{gt}{2} = v_0 \sin \propto$$

$$t = \frac{2v_0 \sin\propto}{g} \quad \text{------------------2}$$

Esta es la ecuación con la que se puede calcular el tiempo que tarda en caer la bala. Al sustituir tendremos:

$$t = \frac{2(50\ {}^{m}/_{s}) \sin 30^0}{9.81\ {}^{m}/_{s^2}} = \frac{100 * 0.5}{9.81} = 5.09\ s$$

> **"La razón se hace adulta y vieja, el corazón permanece siempre niño"**
> *Hipólito Nievo*

Éste es el tiempo que tardó la bala desde que se disparó hasta que cayó al suelo.

Observe la ecuación dimensional:

$$t = \frac{m/s}{m/s^2} = \frac{(\cancel{m})(s^2)}{(\cancel{m})(\cancel{s})} = s$$

b. ¿A qué distancia del cañón cae la bala?

El lugar en que caerá la bala en nuestro diagrama es la distancia x, o sea, la ecuación de desplazamiento en el eje x:

$$x = v_0 \cos \propto * t$$

Con esta ecuación tenemos dos incógnitas: la distancia x y el tiempo t. Pero como ya tenemos una ecuación para calcular el tiempo (ecuación 2), lo sustituimos en la ecuación de la distancia x:

$$x = v_0 \cos \propto * \left(\frac{2v_0 \sin \propto}{g}\right) = \frac{{v_0}^2}{g}[2(\cos \propto)(\sin \propto)]$$

Pero como *2(cosa)(sina)* es igual a *sin2a*, obtenemos la siguiente ecuación:

$$x = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2 \propto$$

Al sustituir los valores en nuestra ecuación tendremos lo siguiente:

$$x = \frac{(50\, m/s)^2}{9.81\, m/s^2}(\sin(2)(30^0) = \frac{2{,}500\, m^2/s^2}{9.81\, \cancel{m}/\cancel{s^2}}(0.866)$$

$$= 220.7\, m$$

c. ¿Cuál será la altura máxima de la bala?

La altura máxima de la bala se obtiene cuando ésta inicia su descenso, en ese momento v_y es cero. Por ello, igualamos la ecuación de velocidad en y a cero.

$$v_y = v_0 \sin \propto - gt = 0$$

De esta ecuación despejamos el tiempo y con ello obtenemos el tiempo que tarda la bala en lograr su altura máxima:

$$\frac{v_0 \sin x}{g} = t$$

Sustituimos los valores:

$$t_{max} = \frac{50(sin30^0)}{9.81} = \frac{(50)(0.5)}{9.81} = 2.54\, s$$

Ahora debemos calcular cuál es la altura y a la que se encuentra la bala en ese tiempo.

$$y_{max} = v_0 \sin \propto t_{max} - \frac{1}{2} g {t_{max}}^2$$

Sustituyendo el tiempo y los valores de velocidad y ángulo tenemos:

$$y_{max} = (50)(sen30^0)(2.54) - \frac{1}{2}(9.81)(2.54)^2$$

$$y_{max} = (50)(0.5)(2.54) - 31.64$$

$$y_{max} = 31.86$$

Si hacemos nuestra ecuación dimensional sabremos si hay congruencia:

$$y_{max} = (m/\cancel{s})(\cancel{s}) - \left(m/\cancel{s^2}\right)(\cancel{s^2}) = m$$

Cuando pensamos acerca de cómo suceden las cosas, en muchas ocasiones podemos plantear una ecuación que nos dé una fórmula para resolver un problema. Entre más conozcamos las matemáticas, más ecuaciones podremos plantear. Sin embargo, existen situaciones en las que no podemos plantear una ecuación, esto es muy importante, pues cuando afirmamos que no hay una ecuación para algo es porque lo hemos estudiado y lo conocemos. Eso también son las matemáticas.

Los problemas del calendario

Miércoles 2. En un examen se pusieron 10 preguntas de opción múltiple con 5 alternativas cada una. ¿Cuál es el mínimo número de personas que deben resolver el examen para garantizar que por lo menos haya dos exámenes con las mismas respuestas?

Lunes 14. De los números 2^{40}, 3^{20}, y 7^{10}¿Cuál es el mayor?

Martes 22. ¿Cuántos números pares de tres dígitos tienen dos dígitos impares?

Educación y Desarrollo

Matemáticas para todos. Año 12, número 117, febrero de 2012. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Consejo Editorial: • Radmila Bulajich Rechtman • Roger Díaz de Cossío • Guillermo Fernández de la Garza • Lourdes Lorena Mena Brito Straffon • Carlos Lara Esparza • María Teresa Rojano • Fernando Solana. **Tel:** 5623-3500 ext. 1208 **E-mail: alfonso@aprendizaje.com.mx**