MATEMÁTICAS PARA TODOS

Educación y Desarrollo

Año 12, Número 121, junio de 2012

EN ESTE BOLETÍN:

INTRODUCCIÓN

El estudio de los números enteros, sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas, es conocida como la *Teoría de los Números*.

Por lo regular no nos detenemos a pensar lo que implica el concepto de número. Casi siempre sólo nos preocupamos por usarlos de manera mecánica y esa mecanización, es producto de muchos años de estudio, análisis práctica del uso de estos signos, los que tienen propiedades y que gracias a ellas podemos hacer en operaciones con ellos.

Si no me creen, pregúntense qué es un número y verán que sus respuestas pueden ser diversas:

- *Un signo que representa a una cantidad.*
- *Un medio para contar.*
- *Un sistema que me ayuda para ordenar y enumerar las cosas.*
- *Un conjunto de signos que nos permiten representar cantidades y hacer operaciones con ellas.*

En realidad poco nos importa lo que entendemos por número, pues en la escuela lo que nos enseñan es a usarlos de manera lógica y con fines prácticos. Pocas veces nos detenemos en los elementos sobre los que se construyeron estos insignificantes signos, pero con los que podemos expresar desde la nada, hasta el infinito.

Como muchas cosas en las matemáticas, los números primero se crearon, usaron y luego, mucho después, se analizaron y estudiaron. Esto se sabe por la forma en que se presentan los números en documentos tan antiguos como las tablillas de arcilla mesopotámicas, babilónicas y asirias, éstas datan desde 5500 a. C. En ellas, se incluyen varios elementos matemáticos, como tripletas pitagóricas (así se les llama, aunque en aquel entonces Pitágoras no existía), el uso de los grados, el trazo y medición de ángulos en el sistema sexagesimal, etc.

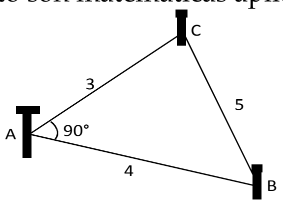
Todo lo referido en dichos antecedentes es para usos prácticos, por ello son identificados como las matemáticas aplicadas. Por ejemplo, una tripleta pitagórica es la suma de dos números elevados al cuadrado $(a^2 + b^2)$ que dan como resultado un tercer número (c^2) también elevado al cuadrado.

$$a^2 + b^2 = c^2;\ \ 3^2+4^2=5^2;\ 9 + 16 = 25$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2;\ \ 25 + 144 = 169$$

Estos conjuntos nos ayudan a definir ángulos rectos, los que son muy útiles para el trazado de terrenos y la ubicación del Sol y otros astros en el zenit.

Tableta de arcilla de Plimptom 322 (1800 a.C.)

En el antiguo Egipto cada año, después de las inundaciones del Nilo, los límites de las áreas de cultivo se perdían y como sobre la producción de ellas se debería pagar los impuestos, el uso de los ángulos para volver a trazar los terrenos fue muy útil. Los ángulos también se usaron para medir el recorrido del Sol y con ello establecer el horario de los días y el calendario. Como se puede observar todo esto son matemáticas aplicadas a lo práctico.



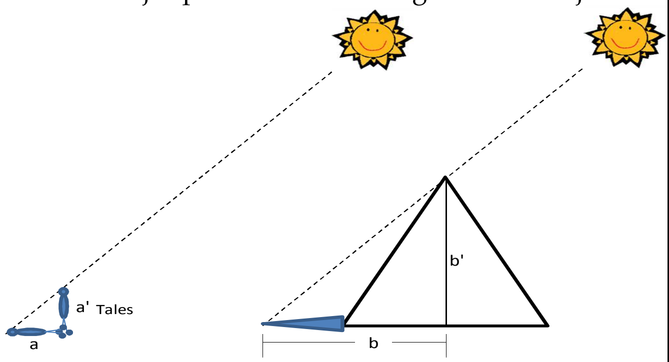
Una cuerda con la que se trace un triángulo de lados 3, 4, 5 generará un triángulo rectángulo

> **"Nada grande ha sido conquistado alguna vez sin el entusiasmo."**
> *Ralph Waldo Emerson*

“Prefiero los errores del entusiasmo a la indiferencia de la sabiduría.”

Anatole France

Otro ejemplo del uso práctico de las matemáticas es la narración del historiador Diógenes Laertius (500? a.C.), sobre cómo el gran sabio Tales de Mileto (600?-545? a.C.) midió la altura de la Gran Pirámide de Giza sin subir a ella. Se dice que Tales esperó hasta que su sobra proyectada por el Sol fuera exactamente la de su altura y en ese momento midió la sombra de la Gran Pirámide. Después, dado que su sombra y la de la pirámide son triángulos semejantes, obtuvo la relación de las bases y las alturas de los dos triángulos. Esto se observa mejor por medio de los siguientes dibujos.



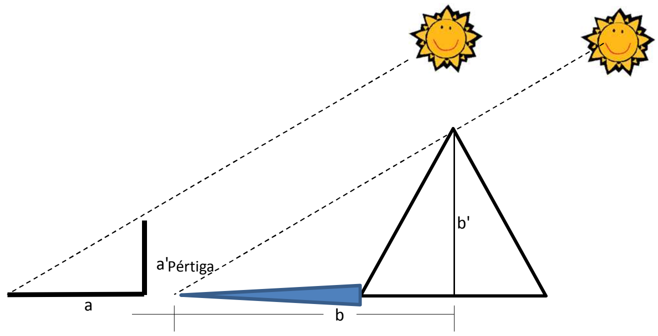
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

Como se conoce a’, a y b. Se puede obtener b’ fácilmente:

$$\frac{a' \times b}{a} = b'$$

Claro que el gran Tales debe haber tenido algunos inconvenientes, como el que el Sol en su Zenit esté exactamente sobre la Gran Pirámide, lo que sólo sucede el 21 de noviembre y el 20 de enero en Giza. Otro fue que como la base de la Gran Pirámide es muy grande, no fue fácil medir su sobra, ya que ésta caía sobre la propia base.

Al ser Tales un matemático y astrónomo ingenioso, estos problemas no fueron obstáculo para lograr la medición, ya que la falta de proyección de la sobra suficiente para salir de la base se logró al esperar a que el Sol tendiera a ocultarse, ya que ángulos de los triángulos no tienen que ser de 45°. En lo que se refiere a la necesidad de que el Sol pase por encima de la pirámide, Tales comprobó que dado que las dos sombras se miden al mismo tiempo, las proyecciones son adecuadas en cualquier día, siempre y cuando se midan sobre la misma línea. Por ello ya no tuvo que esperar hasta las fechas en las que el Sol pasa exactamente sobre la Gran Pirámide. Observe los siguientes dibujos.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \qquad \frac{a' \times b}{a} = b'$$

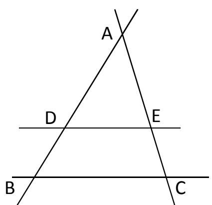
No es necesario esperar a que la sombra de Tales sea igual que su altura. Se puede usar una pértiga y se puede esperar a que el Sol tienda a ocultarse

ORIGEN

La belleza de sus cálculos, dejó maravillado a Tales y con base en ellos, planteó el primer teorema conocido de las matemáticas.

Cuando dos líneas paralelas son interceptadas por dos líneas arbitrarias que se cruzan en un punto, la relación que existe entre sus segmentos será la misma.

Observe el siguiente dibujo y las relaciones entre sus segmentos.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \qquad \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Ustedes se preguntarán sobre qué relación tiene esto con la teoría de los números. Lo que pasa es que las matemáticas aplicadas (lo que hizo Tales para medir la altura) generan la reflexión y con ello se pueden definir propiedades, las que nos permiten explicar el por qué funcionan los números. A esto se le ha llamado matemáticas puras y en ella, desde mi punto de vista, cae la teoría de los números.

Todo lo encontrado en las tabletas de arcilla y el papiro de Ahmes 1650 a. C. se pueden ubicar como casos prácticos para resolver problemas. Cuando Tales de Mileto se dedicó a observar la belleza de sus cálculos y con ello plantear un teorema, se aplicaron las matemáticas puras.

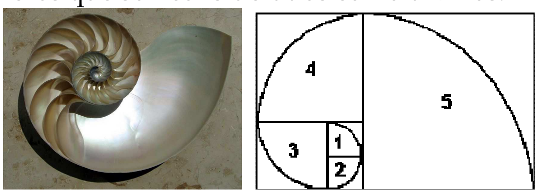
Tiempo después, este tipo de acciones se realizaron con todo detalle en las escuelas de pensamiento

"Cada producción de un genio constituye el producto de su entusiasmo."

Benjamin Franklin

griegas. De estas destaca la escuela pitagórica en la que analizaron las propiedades de los números, las figuras y la música. Esta escuela parte de la idea de que todo en el universo son números y convierte a las matemáticas en una disciplina de filosofía abstracta, como en la actualidad se trata a las matemáticas puras.

En esta escuela se estudiaron las propiedades de los números y se dedicaron a comprobar los teoremas existentes y los que produjeron ellos mismos. Estudian más a la belleza de las matemáticas, que su utilización. Así descuben algunas series y números que son considerados como divinos.



La proporción divina o aura y la naturaleza

TEORÍA DE LOS NÚMEROS EN LA ERA MODERNA

El verdadero inicio de la teoría de los números inicia con Diofanto de Alejandría (250 a.C.), quien escribió al menos 13 libros sobre las propiedades de los números y la solución de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, en sus tratados plantea fórmulas para conocer qué números son la suma de dos números elevados al cuadrado o de tres elevados al cubo, cuáles son las propiedades de los números nones, pares y primos. Desgraciadamente sólo se recuperaron 6 de los 13 libros de Diofanto.

Por desgracia la escuela griega termina con el asesinato de Hipátia en 415. A partir de entonces inicia el obscurantismo, en el que gracias a la iglesia se hunde la humanidad en la ignorancia y el atraso.

Los seis libros recuperados de Diofanto fueron traducidos y publicados en *1621* por Claude Gaspard Bachet con el nombre de aritmética. Cuando Pierre de Fermat *(1601-1665)* tiene acceso a este libro, se queda prendado y por medio de cartas a sus amigos, comenta los descubrimientos de Diofanto e inicia con sus propios análisis. Por ejemplo, plantea lo que se conoce como "el pequeño teorema de Fermat", el que señala:

*Si **p** es un número primo y **a** un entero cualquiera. Entonces, el resto de dividir a **a** elevado a la **p-1** entre **p** es igual a (1 mod p). Es decir:*

$$a^{p-1} = (1 \bmod p)$$

Nota: *1 mod p*, quiere decir que al dividir a^{p-1} entre p se obtendrá un residuo de 1.

Pongamos un ejemplo: $p=5$ y $a = 2$ con ello podemos plantear:

$a^{p-1} = 2^{(5-1)} = 2^4 = 16$

Al dividir a *16* entre *p* o sea *5*, obtendremos un entero *(3)* y un residuo es *1*, lo que cumple el pequeño teorema de Fermat. Por ello se dice que *5* es un primo probable con base en *2*.

El mote de primo probable, es porque resulta que después de un tiempo que Fermat había probado muchos números primos con este teorema, resultó que algunos con ese residuo (1) no fueron primos y ello dio al traste con su alegría y un posible método de cálculo de números primos.

Otra forma de plantear el pequeño teorema de Fermat para mí más clara, es la siguiente:

$$\frac{a^{p-1}-1}{p} = (\textit{división exacta})$$

Esto es: *Si **a** es un número natural cualquiera y **p** un número primo que no es divisor de **a**, siempre se cumple que **p**, es divisor exacto de a^{p-1} -1.*

Por ejemplo si: **p** = 13, **a** = 7, tenemos:.

$7^{(13-1)}$ - 1. = 7^{12}-1 = 13,841'287,201 – 1= 13,841'287,200

Al realizar la división entre 13 tenemos:

$$\frac{13{,}841'287{,}200}{13} = 1{,}064'714{,}400$$

Se cumple el pequeño teorema de Fermat. Nada mal para un abogado que entre juicio y juicio hacía notas sobre las matemáticas y las enviaba a sus amigos por medio de cartas.

Como pueden observar nuestros lectores, la teoría de los números estudia las propiedades de los números, en especial la de los números enteros y no se preocupa en qué se usaran.

Muchos otros matemáticos han estudiado a fondo la teoría de los números, dando resultados impresionantes y muy complicados, destacan algunos como Gauss, Euler, Goldbach, Riemann, Ramanujan, Hilbert, Peano, etc.

Guiseppe Peano (1858-1932) planteó, por medio de cinco axiomas, los fundamentos de esta teoría, a continuación se presenta un resumen de dichos axiomas.

> **“El entusiasmo es un motor, sencillamente indispensable para la perfección.”**
> *Herbert Spencer*

Lo primero que debemos tener en consideración es que existe un viejo debate sobre si el *“cero”* pertenece a los números naturales. Unos teóricos dicen que *sí* y otros *no*. Y dado que no existe acuerdo, Peano adaptó sus cinco postulados a las dos posibilidades *“con cero o sin él”*

Axiomas de Peano cuando el *cero* no forma parte de los números naturales

1. *El 1 pertenece al conjunto de números denominados naturales. (N=1,2,3,4,5,6,…∞)*
2. *Todo número natural (N) tiene un sucesor.*
3. *El 1 no es sucesor de ningún número natural.*
4. *Si hay dos números naturales m y n con el mismo sucesor, entonces m y n son el mismo número natural.*
5. *Si 1 pertenece a un conjunto k de n números naturales y dado un elemento cualquiera k su sucesor k’ también pertenece al conjunto k, entonces todos los números naturales pertenecen a k. En este axioma se fundamenta la inducción matemática, medio por el cual se han comprobado infinidad de proposiciones.*

Axiomas de Peano, cuando el *cero* forma parte de los números naturales

1. *El 0 es un número natural.*
2. *Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.*
3. *El 0 no es sucesor de ningún número natural.*
4. *Si hay dos números naturales m y n con el mismo sucesor, entonces m y n son el mismo número natural.*
5. *Si 0 pertenece al conjunto de números naturales y dado un número natural n y su sucesor n’ pertenecen a a dicho conjunto. Entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto.*

Y aunque no a todos los matemáticos les gusta la inducción matemática, a continuación presento las bases de su razonamiento.

LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA

La inducción matemática parte de dos o varias premisas y a partir de ellas, se obtiene una conclusión.

1. *Premisa mayor: El número a tiene la propiedad P.*
2. *Premisa menor: El hecho de que cualquier número n tenga la propiedad P, implica que n +1 también la tenga.*
3. *Conclusión: Todos los números enteros a partir de a tienen la propiedad P.*

Los productos de la teoría de los números han producido grandes debates, dudas, confusiones y notables aportaciones al mundo matemático. Desde mi punto de vista, los integrantes del mundo de las matemáticas se fascinan con la belleza, precisión y grandeza de los números y con ello la teoría de los números. Esta por lo regular estudia el qué y por qué de los números y sus aportaciones las usamos todos, ya que gracias a ésta podemos realizar las operaciones, confiamos en los sistemas de numeración, conocemos lo que puede o no ser real, se diseñan los sistemas georeferenciales, etc.

Aquellos que no sólo les interesa usar las matemáticas pueden encontrar un extenso campo de saber en esta rama de las matemáticas puras “la teoría de los números”

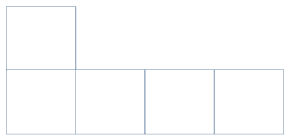
LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Viernes 1. En la expresión,

12 – 11 – 10 - 9 - 8 -7 -6 -5 – 4

Coloca paréntesis en cierto orden de manera que obtengas el máximo valor posible.

Martes 12. En un tablero de 8 x 8 cuadritos quieres colocar fichas como la siguiente. Si no se pueden encimar, ¿cuál es el número máximo de fichas que puedes colocar?



Matemáticas para todos. Año 12, número 121, junio de 2012. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Educación y Desarrollo