

MATEMÁTICAS PARA TODOS

EN ESTE BOLETÍN:

- Introducción a lo probable.
- Experimentos aleatorios.
- Espacio muestral.
- Lo probable.
- Muestras.
- La acostumbrada errata.

Educación y Desarrollo

Año 12, Número 124, octubre de 2012

INTRODUCCIÓN

La definición más simple de probabilidad es la siguiente:

Medio matemático por el que se puede calcular la posibilidad de que algo suceda.

Sin embargo para que esto se pueda hacer, es necesario conocer algunos datos y además que estos cumplan con algunos requisitos. A continuación se presentan las principales características de dicha información y datos.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Al conjunto de acciones que se realizan para saber el resultado, se le llama experimento y cuando sus resultados no responden a una regla o acción definida, se dice que el producto de dichas operaciones depende del azar; por ejemplo el resultado de: lanzar de dos dados, de la extracción de una carta de una baraja o de lanzar una o varias monedas al aire. A este tipo de experimentos se denomina aleatorios.

ESPACIO MUESTRAL

Es el grupo de datos que se integra por todas las posibles soluciones de un experimento, a cada una de estas soluciones se les llama suceso elemental. Por ejemplo: si lanzamos dos dados una vez, podemos tener los siguientes resultados:

$E = (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)(4,4)(4,5)(4,6)(5,5)(5,6)(6,6)$

Como se ve, tenemos 21 resultados diferentes de este experimento y este es el espacio muestral del lanzamiento de los dos dados una vez. Los sucesos pueden ser de diferentes tipos, a continuación se mencionan los principales.

Suceso seguro: es aquel que siempre sucede en un experimento, por ejemplo el Sol pondrá el día de

mañana, al lanzar una moneda al aire obtendremos "Sol" o "águila".

Suceso imposible: es aquel que no puede suceder, por ejemplo ¿Cuál es la posibilidad de que al lanzar una moneda obtengamos el número dos? Este tipo de suceso se representa con la letra \emptyset (\varnothing) y se considera como un conjunto vacío.

Suceso contrario (\bar{A}): Son los elementos de un experimento que no se encuentran en un suceso (A) dado. Por ejemplo, el suceso contrario de que al lanzar un dado obtenga salgan números nones es:

$$P(A)_{\text{nones}} = (1, 3, 5)$$

$$P(\bar{A}) = (2, 4, 6)$$

Esto debido a que el espacio muestral de este experimento es $(1,2,3,4,5,6)$ y lo contrario a los números nones es $(2,4)$ y 6 .

Suceso compatible: es cuando existe uno o varios elementos comunes en dos o más experimentos. Por ejemplo; si en una urna tengo 12 esferas numeradas del 1 al 12 y de ella saco tres esferas anoto sus números y las regreso a la urna. En un segundo experimento se vuelven a sacar tres esferas y los resultados son:

$$P(a) = (4,2,7)$$

$$P(b) = (1,7,5)$$

$P(a)$ y $P(b)$ son sucesos compatibles, dado a que el elemento *siete* aparece en los dos resultados del experimento.

Un experimento aleatorio regular es cuando todos los sucesos elementales tienen la misma posibilidad de ocurrir; por ello, también se dice que un experimento de este tipo es equipobable.

Cuando se hacen dos o más experimentos, sus sucesos se pueden combinar de diferentes maneras, analice los siguientes ejemplos:

Suponga que va a experimentar con una carta de una baraja española de 40 cartas, la que tiene las siguientes características:

"El nacimiento de la ciencia fue la muerte de la superstición."

Carl Sagan

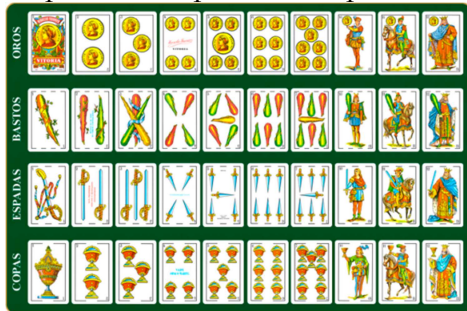
“Se han concedido muchos premios nobel por demostrar que el universo no es tan simple como podíamos haberlo pensado.”

Stephen Hawking

- La baraja tiene 4 categorías (oros, bastos, espadas, copas)
- Cada categoría tiene 10 cartas y éstas se numeran de la siguiente manera: 1,2,3,4,5,6,7,10,11,12. Observe que no hay cartas con los números 8 y 9 de cada categoría.

Por lo anterior podemos decir que existen:

- ✓ 1 de oros, 2 de oros, 3 de oros,, 7 de oros, 10 de oros, 11 de oros, 12 de oros.
- ✓ 1 de bastos, 2 de bastos, 3 de bastos,, 7 de bastos, 10 de bastos, 11 de bastos, 12 de bastos.
- ✓ 1 de espadas, 2 de espadas, 3 de espadas, ... 7 de espadas, 10 de espadas, 11 de espadas, 12 de espadas.
- ✓ 1 de copas, 2 de copas, 3 de copas, ... 7 de copas, 1º de copas, 11 de copas, 12 de copas.



Nos preguntamos lo siguiente de una baraja española:

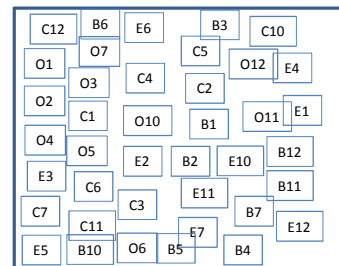
- ¿Cuál es el espacio muestral?
- ¿Cuáles son los componentes de un suceso integrado por cartas pares?
- ¿Cuáles son los componentes de los contrarios de las cartas pares?
- ¿Cuál es el suceso integrado por las copas pares?
- ¿Cuál es el suceso integrado por los oros nones y las copas pares?

La representación de los sucesos de un campo muestral se puede hacer por medio de notaciones escritas o a través de diagramas de conjuntos. Para facilitar la presentación de los sucesos incluiremos antes de los números de las cartas, una letra referente a:

Oros = O
 Bastos = B
 Espadas = E
 Copas = C

a) Espacio muestral

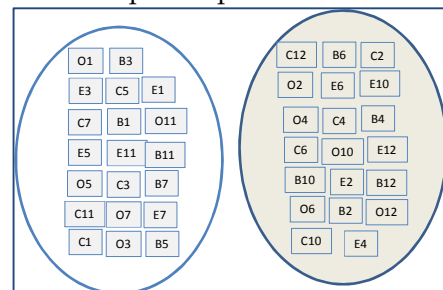
El espacio muestral de una baraja española está compuesto por todos los posibles resultados elementales de un experimento. Por ello, el espacio muestral en este caso está compuesto por 40 sucesos elementales. Además si sacamos una carta al azar de dicha baraja tiene la misma posibilidad que las otras 39 de ser seleccionada, por ello se dice que es un experimento regular o equiprobable.



Si sacó una carta obtendré una de 40.

b) El suceso integrado por todos los elementos pares de la baraja española.

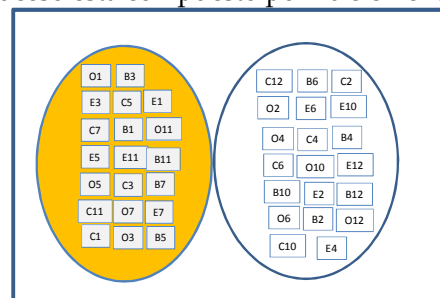
Este está compuesto por las siguientes cartas. $S(E) = \text{Oros } (2,4,6,10,12); \text{ Bastos } (2,4,6,10,12); \text{ Espadas } (2,4,6,10,12); \text{ Copas } (2,4,6,10,12)$. Con lo anterior nos damos cuenta de que este suceso está compuesto por 20 elementos.



El conjunto azul es el resultado del experimento

c) Suceso contrario al compuesto por todas las cartas pares de la baraja.

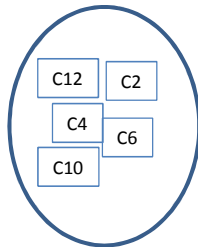
$S(\bar{E}) = \text{Oros } (1,3,5,7,11); \text{ Bastos } (1,3,5,7,11); \text{ Espadas } (1,3,5,7,11); \text{ Copas } (1,3,5,7,11)$. Este suceso está compuesto por 20 elementos.



El conjunto naranja es suceso contrario de S(E)

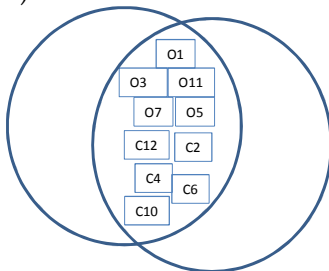
d) **Suceso integrado por las copas pares de una baraja española.**

$S(C_p) = \text{Copas } (2,4,6,10,12)$. Este suceso tiene cinco elementos.



e) **Suceso de losoros nones y las copas pares de una baraja española.**

$S(C_{py}O_n) = \text{Copas } (2,4,6,10,12)$ y **Oros** (1,3,5,7,11). Este suceso tiene 10 elementos.



LO PROBABLE

Hasta el momento sólo nos hemos dedicado a analizar la composición y características de los sucesos de un experimento aleatorio regular. Al conocer esto, podremos definir el número de sucesos elementales o posibles, así como el número de casos favorables de un experimento. La probabilidad de que algo suceda se calcula por medio de la regla clásica de la probabilidad o regla de Laplace, la que establece lo siguiente:

La probabilidad de que suceda un suceso es el cociente del número de casos favorables (N_f) entre el número de casos posibles (N_p).

$$P(A) = \frac{N_f = \text{Número de casos favorables}}{N_p = \text{Número de casos posibles}}$$

Con esta regla en un experimento regular, en el que se conocen el número de casos favorables y posibles, como los de las cartas, se puede calcular la probabilidad de que un hecho definido suceda, por ejemplo:

a) ¿Cuál es la posibilidad de que al sacar una carta de una baraja española sea una carta par?

b) ¿Cuál es la posibilidad de que saque una carta de copas con número par?

c) ¿Cuál es la posibilidad de que saque una carta deoros nones o copas pares?

En todos los casos conocemos cuáles son los casos favorables y el total de casos posibles.

a) Posibilidad de sacar una carta par.

- Número de casos favorables $N_f = 20$
- Número de casos posibles $N_p = 40$

$$P(A) = \frac{N_f = 20}{N_p = 40} = 0.5$$

b) Posibilidad de que salga una carta de copas con un número par.

- Número de casos favorables $N_f = 5$
- Número de casos posibles $N_p = 40$

$$P(A) = \frac{N_f = 5}{N_p = 40} = 0.125$$

c) Posibilidad de que se saque una carta deoros nones o copas pares.

- Número de casos favorables $N_f = 10$
- Número de casos posibles $N_p = 40$

$$P(A) = \frac{N_f = 10}{N_p = 40} = 0.25$$

FRECUENCIA

Cuando un experimento aleatorio no es regular, o sea que no se conoce el número de casos favorables de un suceso, es necesario realizar de manera práctica el experimento. En estos casos los resultados se pueden presentar por medio de la frecuencia de su aparición, por ejemplo:

Si tiene usted tres monedas y las lanza al aire dos mil veces. ¿Cuáles son las probabilidades de sus resultados?

Observe que usted puede definir el número de resultados posibles, (Espacio muestral) ya que es 2000, pero no definir con qué frecuencia van a salir las siguientes combinaciones:

A	A	A	Tres águilas
A	A	S	Dos águilas y un sol
A	S	A	
S	A	A	
S	S	A	Dos soles y un águila
S	A	S	
A	S	S	
S	S	S	Tres soles

A = Águila; S = Sol

Dado que no distinguimos entre las tres monedas las combinaciones que debemos analizar sólo son cuatro:

Tres águilas
Dos águilas y un sol
Dos soles y un águila
Tres soles

Aún no sabemos con qué frecuencia pueden salir estos resultados, por ello se debe realizar de manera práctica el experimento lanzando 2000 veces las tres monedas y anotar los resultados. Estos son los que se presentan en la siguiente tabla. Al mismo tiempo en la tabla se presentan los resultados del cálculo de las probabilidades, esto se logra al aplicar la regla clásica de la probabilidad.

Suceso	Frecuencia de aparición	Regla de la probabilidad	Probabilidad
Tres águilas	255	255/2000	0.13
Dos águilas y un sol	749	751/2000	0.37
Dos soles y un águila	738	738/2000	0.37
Tres soles	258	256/2000	0.13

Con esto podemos decir que la probabilidad de que obtenga tres águilas al lanzar tres monedas al aire es de 0.13.

MUESTRA

Para obtener la probabilidad, no es necesario realizar todo el experimento (los 2000 lanzamientos) con realizar en las mismas condiciones una pequeña parte del experimento (en una muestra) obtendremos unos resultados muy parecidos a los que se obtienen al realizarlo completo. A la pequeña diferencia de los resultados entre el experimento completo y el realizado con una muestra representativa, se le llama precisión. Observe la similitud de los resultados con el experimento completo.

Suceso	Frecuencia aparición	Regla de la probabilidad	Probabilidad
Tres águilas	4	4/30	0.13
Dos águilas y un sol	11	11/30	0.37
Dos soles y un águila	12	10/30	0.33
Tres soles	5	5/30	0.13

La probabilidad tiene muchas aplicaciones en la vida diaria y en la ciencia. En un origen los matemáticos estudiaron este tema con el fin de tener éxito en los juegos de azar, en algunos caso ganaron, pero el verdadero beneficio fue el surgimiento de una rama de las matemáticas de gran utilidad.

LA ACOSTUMBRADA ERRATA

En nuestro número 123 tuve dos erratas, por las que pido disculpas y doy las gracias al joven Patricie Bourgade hijo de nuestro querido amigo Pedro Hot por hacernos la observación correspondiente.

- En el número de Euler olvidé poner el punto del 2.71828182845904523536...
- Equivoqué la fórmula para el cálculo del número de Euler. Ya que puse:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

En lugar de:

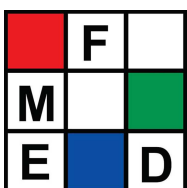
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Lunes 1. Un cuadrado tiene perímetro p y área A . si $A = 2p$, cuanto mide p ?

Viernes 12. Determina el menor entero n para el cual $(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\dots(n^2-1)$

Es un cuadrado perfecto.



Matemáticas para todos. Año 12, número 124, octubre de 2012. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Consejo Editorial: • Radmila Bulajich Rechtman • Roger Díaz de Cossío • Fernando Solana. **Tel:** 5623-3500 ext. 1208 **E-mail:** alfonso@aprendizaje.com.mx