EN ESTE BOLETÍN:

MATEMÁTICAS PARA TODOS

Educación y el Desarrollo, A. C.

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas

Año 9, Número 83, septiembre de 2008

LAS MATEMÁTICAS Y LA MENTE

En otras ocasiones, hemos presentado algunos de los acontecimientos que demuestran cómo es que el hombre ha construido esta herramienta útil para su vida cotidiana, *las matemáticas*. En esta ocasión, expondremos por qué el hombre cree en las matemáticas, y cómo es que las ha adoptado e integrado a su vida. Esto podría parecer irrelevante dado que su uso es común y, usualmente, no nos detenemos a pensar en por qué las damos por buenas.

Con las matemáticas resolvemos muchas de nuestras necesidades cotidianas y por ello forman parte de nuestra vida diaria, pero ¿cómo es que esta aceptación se da en nuestro cerebro? Como ya hemos comentado antes , hasta el momento hay más preguntas sobre el funcionamiento de este órgano que conocimientos precisos sobre su operación. Por ello, incluiremos en esta ocasión un concepto que por mucho tiempo fue negado y siempre ha sido controvertido: La mente.

Desde el punto de vista psicológico, la mente es el nombre común dado al entendimiento, la conciencia; el espacio donde se dan, por medio del raciocinio, la percepción, las emociones, la memoria, la imaginación y la voluntad. Su existencia ha sido aceptada en todas las corrientes de la psicología, excepto por el conductismo que supone que los procesos de aprendizaje son la reacción a estímulos, con los que se generan conexiones neuronales en el cerebro. Es decir, para los conductistas la mente no existe.

Para explicar por qué las matemáticas son aceptadas por el hombre —independientemente de dónde se procesen— partiremos de la base de que, cuando reflexionamos y con ello llegamos a una conclusión, dejamos en nuestro cerebro una "huella" calificada como verdad o efectiva. Cuando, para realizar esta actividad, se encuentra una metodología o un conjunto de acciones que acortan el camino, la reflexión se hace menos meticulosa y se vuelve más rápida. Esta metodología puede ser utilizada como el atajo con el que aprendemos a tratar algunos problemas. Estos conocimientos, atajos o métodos son, al final de cuentas, las matemáticas. Supongamos que todo esto sucede en la mente —por ello es que nos metemos en este escabroso tema— y analicemos el siguiente ejemplo.

Si a usted le cobran nueve pesos por tres kilos de tortillas, de manera automática usará un atajo llamado división para afirmar que cada kilo le costó 3 pesos.

La pregunta es, ¿cómo fue que su cerebro adoptó estas matemáticas?

Las matemáticas establecen como fundamento el que todas sus afirmaciones pueden ser comprobadas. Esto garantiza que, a través de las matemáticas es posible saber si algo es cierto o falso.

Volviendo al ejemplo, si usted dedujo que cada kilo le costó 3 pesos entonces, con el simple hecho de sumar tres veces 3, obtendrá los nueve pesos que pagó en total; con ello su afirmación será verdadera, usted dará por buena la operación y quedará tranquilo.

Lo interesante aquí es que hacemos exactamente lo mismo con el lenguaje sin necesidad de usar los números. Con sólo plantear los argumentos adecuados, podemos llegar a una conclusión y posteriormente comprobarla. La única diferencia es que con las matemáticas usamos símbolos de menor extensión que las palabras, y que las normas para su uso son unívocas. En ambos casos, con el lenguaje o con las matemáticas, la aceptación de los

> **"El ignorante afirma, el sabio duda y reflexiona"**
>
> *Aristóteles*

> **"La matemática es la ciencia del orden y la medida de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles."**
>
> *René Descartes*

argumentos, la reflexión sobre ellos y la obtención de conclusiones se hacen de manera abstracta en nuestro cerebro pero, puesto que no podemos ubicarlo en una parte específica de este órgano, nos atrevemos a decir por ello que esto se hace con la mente.

Los primeros análisis sobre la construcción de una reflexión para hacer deducciones, se encuentran en la lógica aristotélica. Ésta incluye dos proposiciones al menos, que deberán ser reales e inobjetables, y a través de las cuales se podrá deducir una tercera. Las proposiciones son oraciones con sujeto y predicado, y pueden ser afirmativas o negativas. Como ejemplo común se tiene el famoso y muy trillado silogismo de Aristóteles:

1. Todos los hombres son mortales
2. Sócrates en un hombre
Por lo tanto, Sócrates es mortal

Aquí se observa que, como producto del análisis de las dos proposiciones iniciales se deduce la tercera.

Nuestro lector se preguntará ¿qué tiene que ver esto con las matemáticas y la mente? Pues bien, resulta que cuando usamos las matemáticas aplicamos esta misma lógica pero con signos y reglas bien definidas.

Observe lo siguiente: Para nuestros fines estableceremos la siguiente nomenclatura:

H = hombres
M = mortal
S = Sócrates

Podríamos plantear las siguientes proposiciones:

H es M
S es H

Por último reflexionando podemos afirmar:

si H es M* y si *S es H*; entonces *S es M.

Lo que al traducir nuestra nomenclatura resulta ser *Sócrates es mortal*.

Perdonen la simpleza del ejemplo pero lo mismo sucede con los números, sólo que con más reglas. Piense: ¿acaso no es esto lo que sucede con el álgebra, claro con mayores argumentos?

Este tipo de análisis se puede aplicar a varias actividades del hombre pero, dada la precisión y universalidad de las matemáticas, se han adoptado éstas de manera casi total para hacer deducciones con sustento. Podrían darse muchos ejemplos de lo anterior pero, por ahora, quisiéramos aplicarlo a uno de los temas más estudiados por los matemáticos: la teoría de los números.

El conjunto de los números naturales es el que resulta de agregar la unidad al número precedente. Esto, a partir del cero.

Con esto podemos plantear dos proposiciones:

Los números naturales:

1. Inician con el cero
2. Son el resultado de agregar la unidad al número precedente

Por lo tanto, con estos dos argumentos, podemos decir que el conjunto de números naturales es:

(0, 0+1=1, 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, ….. n+1)

Así es como se fueron construyendo las matemáticas.

Pedimos a nuestros lectores que analicen en qué parte de cerebro procesaron esta información o si ello se hizo con la mente. De algo podemos estar seguros: se hizo pensando.

Para mayor información sobre este tema sugerimos consultar el magnífico libro de Keith Devlin titulado *The Language of Mathematics: Making the invisible visible.* Editorial W. H. Freeman and Company. England.

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Ya hemos presentado algunos temas relacionados con el álgebra. Tratamos sus orígenes, fundamentos y algunas aplicaciones. En este número, a petición de varios de nuestros lectores, volveremos a tomar el tema pero, ahora, para conocer las fracciones algebraicas.

Es importante recordar que el álgebra elemental es similar a la aritmética, pues en ella se aplican las cuatro operaciones básicas (+, –, x, ÷), pero en lugar de números se usan letras y éstas pueden tomar diferentes valores. Lo importante de esto es que, por medio del álgebra elemental es posible:

a) Presentar y analizar diferentes leyes; como por ejemplo las de la aritmética:

Ley conmutativa

Si usted tiene 8 libros sobre una mesa y 4 sobre una silla, tendrá 12 libros sin importar si cuenta primero los de la silla y luego los de la mesa o viceversa.

En aritmética esto se expresa así:

(8 libros de la mesa + 4 libros de la silla) = 12 libros = (4 libros de la silla + 8 libros de la mesa)

En álgebra se puede expresar así:

(m + s) = 12 libros = (s + m)

“La imaginación es más importante que la sabiduría”

Albert Einstein

En donde: m= 8 libros de la mesa y s= 4 libros de la silla
En palabras se enuncia como que el orden de los sumandos no altera el resultado de la suma.

Ley asociativa

Si Juan tiene 5 años, Pedro 6 años, Lalo 12 años y Carlos 15. La suma de todas las edades es (5 + 6 + 12 + 15) = 38 años

La suma de las edades seguirá siendo 38 años si se suman varios elementos y su resultado es sustituido como un sumando.

En nuestro ejemplo esto se puede observar de la siguiente manera:

Como (5 + 6) = 11, entonces (5 + 6) + 12 + 15 = 11 + 12 + 15 = 38 años

En términos algebraicos se puede expresar así:

$$(j + p + l + c) = x = (j + p) + l + c$$

b) Con el álgebra se pueden representar números desconocidos y formular ecuaciones.

Por ejemplo, si usted sabe que un corredor recorre 10 km en 30 minutos, usted puede decir que va a 20km/hr, pues si siguiera con ese ritmo en una hora recorrería 20km.

Con aritmética usted puede plantear lo siguiente:

$$\frac{10km}{30\,\text{min}} = \frac{10km}{0.5hr} = 20\,{}^{km}\!/_{hr}$$

Si establecemos que la distancia es d, el tiempo t y la velocidad v, con el álgebra podemos plantear lo siguiente:

$$\frac{d}{t} = v = \frac{10km}{0.5hr} = 20\,{}^{km}\!/_{hr}$$

Con lo anterior definimos la fórmula de la velocidad media.

Una vez que hemos presentado algunas bases del álgebra, podremos decir que las fracciones algebraicas tienen tres reglas base:

1. *Las fracciones algebraicas se representan por un numerador (a) y un denominador (b), en donde* ***el denominador debe ser diferente a cero.***

$$\begin{array}{l} \textit{Numerador} \rightarrow \\ \textit{Denominador} \rightarrow \end{array} \frac{a}{b}\ ;\ b \neq 0$$

2. *Para hacer operaciones con las fracciones algebraicas se aplican las mismas reglas que en la aritmética.*
3. *El valor de una fracción no se altera si se multiplica o divide su numerador y denominador por una misma cantidad. Esta cantidad debe ser diferente de cero.*

$$\frac{a}{b} = c = \frac{(a)(3)}{(b)(3)}$$

Al desarrollar un ejemplo con números tenemos:

Supongamos que a=21 y que b=7, entonces: $\frac{a}{b} = \frac{21}{7} = 3$, *pero si se multiplica por 3 el numerador y el denominador obtenemos:*

$$\frac{(a)(3)}{(b)(3)} = \frac{21x3}{7x3} = \frac{63}{21} = 3$$

Una fracción algebraica se puede simplificar hasta llegar a otra equivalente.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Nuestros lectores pueden comprobar que la ecuación es verdadera, siempre y cuando $x \neq -2$

Las fracciones tienen tres signos: uno del numerador, otro del denominador y uno de toda la fracción

Signo del numerador

Signo de la fracción $\rightarrow \; -\left(\frac{+a}{-b}\right)$

Signo del denominador

Suma y resta de fracciones algebraicas

El primer paso es calcular el mínimo común denominador (*MCD*). Éste es un término que puede ser dividido por todos los denominadores de las fracciones que se van a sumar o restar. En caso de que todas las fracciones tengan el mismo denominador, éste será el mínimo común denominador.

El *MCD* se puede calcular de varias formas, a continuación presentamos dos. Observe las como se calcula en el siguiente ejemplo:

$$\frac{3}{4ab} - \frac{6}{a^2} + \frac{9}{12b^2} = ?$$

Usted debe encontrar un término que pueda ser dividido por: *4ab*, a^2, y $12b^2$. Éste puede ser el producto de los tres denominadores: $(4ab)(a^2)(12b^2) = 48\,a^3b^3$, pero <u>no es el mínimo</u> común denominador, puesto que podría ser menor y seguir siendo dividido por todos los denominadores. Para encontrarlo, sólo divídalo entre el denominador que tenga el menor exponente, en este caso es el *4ab*.

Así tendrá: $\frac{48a^3b^3}{4ab} = 12a^2b^2$

También se pueden reducir uno a uno los términos hasta que todos sean unos:

"La arquitectura es música congelada"

Arthur Schopenhauer

Denominadores			*divisor*	
4ab	*a²*	*12b²*	*A*	*De la columna de divisores se obtiene (a)(a)(b)(b)(4)(3)=12 a² b²*
4b	*a*	*12b²*	*A*	
4b	*1*	*12b²*	*B*	
4	*1*	*12b*	*B*	
4	*1*	*12*	*4*	
1	*1*	*3*	*3*	
1	*1*	*1*		

Ahora sí podrá realizar su operación:

$$\frac{3}{4ab}-\frac{6}{a^2}+\frac{9}{12b^2}=\frac{9ab-72b^2+9a^2}{12a^2b^2}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Se multiplica el numerador por el numerador y el denominador por el denominador.

$$\frac{a}{b}\bullet\frac{a}{c}=\frac{a^2}{bc}$$

$$\frac{x+3}{x+5}\bullet\frac{x^2+10x+25}{x^2-9}=\frac{(x+3)(x+5)(x+5)}{(x+5)(x-3)(x+3)}=\frac{(x+5)}{(x-3)};x\neq 3$$

División de fracciones

Las divisiones de fracciones algebraicas se realizan multiplicando el numerador por el inverso del denominador. Esto de manera algebraica se plantea así:

$$\frac{\overset{\text{Numerador}\rightarrow}{\frac{a}{b}}}{\underset{\text{Denominador}\rightarrow}{\frac{c}{d}}}=\frac{a}{b}\bullet\overset{\text{Inverso del denominador}\downarrow}{\frac{d}{c}}=\frac{a\,d}{b\,c}\quad b,c\neq 0$$

Otro ejemplo sería: $\dfrac{\frac{x+2}{x+5}}{\frac{x-4}{x+7}}=\dfrac{x+2}{x+5}\bullet\dfrac{x+7}{x-4}=\dfrac{x^2+9x+14}{x^2+x-20}$

Como todo en las fracciones algebraicas se requiere pensar, orden y algo de práctica.

LO IRRACIONAL DE LOS PITAGÓRICOS

Se dice que los pitagóricos consideraban a las matemáticas como algo perfecto, tanto que para ellos el número tres y los triángulos eran divinos. Una vez un alumno llamado Hipaso de Metaponto (¿?-500 a. C) interrumpió en su clase a Teano, esposa de Pitágoras, y le preguntó por qué la $\sqrt{2}$ no tenía fin. Esto implicaba que un triángulo rectángulo con lados de la unidad, no tendría una hipotenusa bien definida. Tal fue la conmoción, que Pitágoras consideró que la raíz del número 2 ensuciaba a los números, por lo que la declaró inexistente y corrió a Hipaso. Hasta le construyeron una tumba para que no fuera a regresar. No fue sino hasta que Eudoxo de Cnidos y Euclides, más o menos por el 350 a.C., clasificaron los números y reconocieron la existencia de los irracionales.

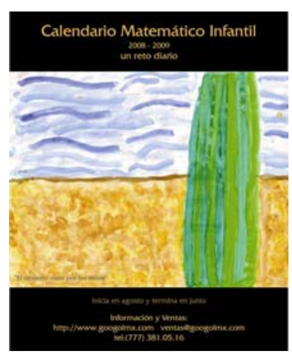
LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Viernes 5. En una sucesión, cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Si el segundo término es igual a 2 y el quinto término vale 2008 ¿cuál es el sexto?

Lunes 15. Si un entero de dos dígitos es *q* veces la suma de sus dígitos, ¿por cuánto hay que multiplicar la suma de sus dígitos para obtener el número formado al intercambiar los dígitos del número original?

Miércoles 24. ¿Cuántos números primos *p* existen tales que p + 1 es un cuadrado perfecto?

Queremos informar a nuestros lectores que ya salió el calendario matemático infantil 2008-2009. Para información sobre su compra consulte el sitio www.googolmx.com



Matemáticas para todos. Año 9, número 83, septiembre de 2008. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Educación y Desarrollo, AC
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas