FMED
Educación y el Desarrollo, A. C.
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas

MATEMÁTICAS PARA TODOS

EN ESTE BOLETÍN:

Año 9, Número 84, octubre de 2008

LO QUE NO ES VERDAD EN LAS MATEMÁTICAS

En nuestro boletín anterior, publicamos un artículo en el que planteamos que, debido a que las matemáticas se fundamentan en la lógica, tenemos razones suficientes para haberlas hecho nuestras y creer en ellas. En dicho artículo, nos aventuramos a hacer la siguiente aseveración: "Las matemáticas establecen como fundamento el que todas sus afirmaciones pueden ser comprobadas. Esto garantiza que, a través de las matemáticas, sea posible saber si algo es cierto o falso."

A lo anterior, el Doctor Roger Díaz de Cossío hace una prudente corrección señalando que "eso no siempre es verdad". Hecho que demostró el lógico y matemático Kurt Göedel (1906-1978) con sus dos teoremas de lo incompleto *(Gödel's incompleteness Theorems)* publicados en 1931, al concluir su doctorado con tan sólo 25 años de edad.

Con ello, Göedel generó un cisma en la filosofía de las matemáticas, pues demostró que en la aritmética de los números naturales, que se construye a partir sistemas fundamentados en axiomas consistentes, es posible tener proposiciones verdaderas que no cumplan con los axiomas en los que se sustentan. Para ello, Göedel desarrollo una técnica conocida como la enumeración de Göedel *(Gödel numbering)*.

Kurt Gödel expuso también que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas planteados en la teoría de conjuntos si estos son consistentes. Por otro lado, participó en a la teoría de la demostración, al esclarecer las conexiones entre la *lógica clásica, la lógica intuicionista y la lógica modal*. Por lo anterior, es considerado como uno de los lógicos más importantes del siglo XX junto con Bertrand Russell, Whitehead y Hilbert.

En conclusión, Göedel confirmó el popular refrán que reza "toda regla tiene su excepción".

A lo largo de la historia de las matemáticas, han existido otras sacudidas que han provocado preocupación, zozobra y mucho, análisis. El primer caso del que se tiene noticia es el de los pitagóricos, cuando descubrieron que lo números no eran tan perfectos como creían pues existen algunos números que no pueden representarse sólo con enteros o con sus fracciones. Ejemplo de éstos son los números irracionales como la *raíz cuadrada de dos, el número e o Pi* (π). Tras este suceso, los números enteros perdieron su cualidad "divina".

Otro gran cisma en el mundo matemático se dio con el surgimiento de las geometrías no euclidianas que provocaron que uno de los cinco postulados de Euclides tuviera que ser rectificado. En su versión moderna, este postulado señala que *por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta*. Anteriormente, el postulado establecía que *dos rectas paralelas sólo se cruzaban en el infinito*. Durante muchos siglos, este postulado se dio por bueno a pesar de que nadie podía comprobarlo, no obstante la preocupación y angustia de varios matemáticos. Sin embargo, en las geometrías no euclidianas como la elíptica y la hiperbólica, las paralelas simplemente no existen, el teorema de Pitágoras no es válido y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor a 180º.

A pesar de que estas geometrías son diferentes a las ideas intuitivas con las que por lo regular vemos el mundo, esto no impide que sean consideradas como verdades. Lo anterior significa que es posible sustentar la construcción de las matemáticas sobre axiomas consistentes que, en algunas circunstancias, pueden no resultar ciertos. Como esto tiene más que ver con la consistencia que con

"Antes que hombres de ciencia, deberíamos ser hombres."
Albert Einstein

“El uso inteligente del ocio es producto de la civilización y la educación.”
Bertrand Roussell

la verdad, aclararemos a qué nos referimos por “consistencia”: Un sistema es consistente, si sus axiomas no producen contradicción al ser aplicados; por ello podemos decir que la geometría Euclidiana es verdadera y que la no Euclidiana también lo es.

Otra gran “sacudida” a la aritmética, ocurrió cuando Bertrand Roussell presentó, en 1901, su famosa paradoja del Barbero. Con ella, echó abajo el planteamiento de Gottlob Frege quien afirmaba que la aritmética era lógica pura y que cualquier humano podía desarrollarla con un poco de sentido común.

Retrocedamos un poco en la historia... Fue Giuseppe Peano quien, partiendo de la lógica inductiva, planteó los enunciados de la aritmética con cinco postulados básicos que definían el sistema de los números naturales:

- ✓ *El cero es un número*
- ✓ *Si n es un número, el sucesor de n también lo será.*
- ✓ *A números distintos corresponden distintos sucesores.*
- ✓ *El cero no es sucesor de ningún número.*
- ✓ *Si esto se cumple para el cero, entonces se cumple para todos los números.*

Con estos postulados se puede construir cualquier tipo de numeración. Ésta puede iniciar con el cero al cual, para crear a su sucesor, se le agrega uno y con ello obtenemos un número nuevo llamado “uno”, si a éste le agregamos de nuevo otro uno, tendremos el ”dos” y así hasta el infinito.

A partir de estos postulados, en 1884 el lógico alemán Gottlob Frege, comenzó a realizar varios estudios calificados de profundos. Estos tenían como fin demostrar que la aritmética era una rama de la lógica, lo cual puede interpretarse como que la aritmética puede ser descubierta por el hombre por el simple hecho de pensar en ella. Frege terminó sus estudios en 1900 y en 1901 los presentó en la Reunión Mundial de Matemáticos. Durante esta reunión, el lógico y filósofo Bertrand Roussell presentó su paradoja del Barbero, con la que todo el trabajo de Frege quedó destruido. En este caso, la verdad de este entusiasta de las matemáticas no fue válida para los demás; incluso él, después de reflexionar sobre la paradoja de Roussell, tampoco creyó en su propio planteamiento.

La paradoja de Roussell es la siguiente:

En un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet diestro en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y en poner sanguijuelas. Un día el emir se dio cuenta de la falta de barberos en el emirato, y ordenó que los barberos sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas. Cierto día el emir llamó a As-Samet para que lo afeitara y él le contó sus angustias:

> *En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo, por lo tanto no debería de afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo! Pero si por el contrario, no me afeito, entonces algún barbero me debe afeitar ¡pero yo soy el único barbero de allí!*

El emir pensó que sus pensamientos eran tan profundos, que lo premió con la mano de la más virtuosa de sus hijas. Así, el barbero As-Samet vivió por siempre feliz.

En 1902 Roussell envió una carta a Frege dando mayores argumentos sobre sus planteamientos: *Puede haber conjuntos que estén integrados por elementos que no son miembros de sí mismo. Por ejemplo tener un sólo libro, que contenga todo el conocimiento infinito. ¿Cómo puede un sólo libro (algo finito) contener algo infinito? Otro ejemplo sería, un conjunto cuyos elementos sean todas las ideas abstractas. ¿Cómo puede existir este conjunto, si él mismo es una idea abstracta?*

15 años después, con sus teoremas de lo incompleto, Kurt Göedel dio el tiro de gracia a los planteamientos con los que se argumentaba que la aritmética era una rama de la lógica y que ésta no requería de la experiencia ni de la intuición.

Por ahora, nosotros, humildes mortales, conformémonos con comprender la verdad de la geometría Euclidiana, que es la más intuitiva dentro del mundo en el que vivimos; claro, sin dejar de admitir que no hay verdades absolutas y que el mundo se ve según el cristal con que se mira.

Gracias al Dr. Roger por darnos un tema que comentar.

LOS NÚMEROS Y SUS FUNDAMENTOS

En los nueve años que llevamos publicando este boletín, hemos presentado todo tipo de artículos relacionados con los muchos temas de las matemáticas y sus ramas; comentamos, tratamos y discutimos axiomas, demostraciones, teoremas, enunciados y tantas otras cosas. Sin embargo, al revisar nuestra colección de artículos, encontramos

> **“Toda porción de verdad debe encajar en cualquier otra porción, porque todas forman parte del todo.”**
>
> *Thomas W. Atkinson*

que poco hemos hablado de la esencia de la aritmética: Los números. Por ello, en esta ocasión presentaremos algunos conceptos de la teoría de los números. Consideramos que este saber es fundamental para enseñar y aprender lo útiles, prácticas y divertidas que son las matemáticas.

Como hemos mencionado antes, los números fueron creados para contar. En un principio, contar consistía en comparar piedras, dedos o cosas con la cantidad de objetos que se quería contar. Por ejemplo, si se tenían 25 ovejas, se colocaba una piedra en una canasta por cada oveja y cuando, después de pastar éstas debían regresar al corral, por cada oveja que regresaba se sacaba una piedra. Si sobraban piedras, se debían buscar tantas ovejas como piedras quedaran. Después de piedras se usaron marcas y así, poco a poco, se fueron construyendo símbolos más complejos hasta que se llegó a los números. Tras algún tiempo, los estudiosos y los teóricos de las matemáticas comenzaron a conceptualizar la esencia y la función de estos y así surgió la teoría de los números. Esta teoría inició con Diofanto de Alejandría (200-280) y se sigue estudiando hasta nuestros días.

Para entender realmente el significado de “número”, es necesario comprender uno de los conceptos más elementales de un sistema de numeración: el concepto de *antecesor* y *sucesor*. Es decir, para construir un sistema de numeración, se debe partir de que todos los números pueden tener un antecesor y un sucesor; estos dependerán de las normas que se establezcan. Es importante tener en consideración que si se parte del cero, que éste puede considerarse como un número y que además, no tiene antecesor. Así, se puede construir un sistema de numeración dependiendo de las reglas de antecesor y sucesor.

Por ejemplo, si partimos del cero y a cada elemento le agregamos uno, obtendremos todos los números *denominados naturales*, los que inician con el cero y terminan en el infinito.

$$(0 + 1 = 1,\ 1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4 \ldots n + 1)$$

Esto, es igual al conjunto de los números naturales.

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

También podríamos construir el conjunto de los números naturales pares, a partir del cero:

$$(0,\ 0 + 2 = 2,\ 2 + 2 = 4,\ 4 + 2 = 6,\ \ldots n + 2)$$

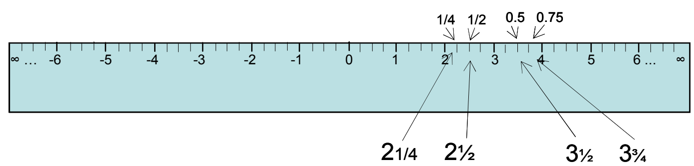
Para utilizar con mayor facilidad los números, se crearon varios símbolos. Estos nos permiten hacer comparaciones, establecer magnitudes y ordenarlos. Estos símbolos son los cinco comparadores básicos:

$>$ *mayor que*
$<$ *menor que*
$\geq$ *mayor o igual que*
$\leq$ *menor o igual que*
$=$ *igual que*

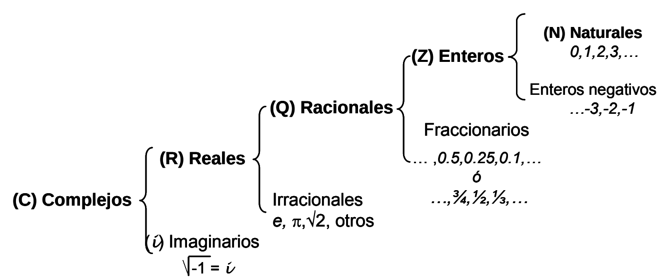
Con ellos se puede decir que:

$$2 < 5, \quad 320 > 319, \quad a \leq 3, \quad b \geq 7, \quad 16 = 4 \times 4 = 4^2$$

Si quisiéramos representar los números en un diagrama, podríamos hacerlo sobre una recta. Este elemento gráfico es muy útil para mostrar los antecesores y sucesores. Todos conocemos la recta numérica, sin embargo, no está por demás mostrarla y observar los antecesores, los sucesores y el orden que guardan los números.



En la recta numérica se pueden distinguir tres tipos de números: *los naturales (0,1,2,3,4…), los enteros (…-3,-2,-1,0,1,2,3…), y los racionales en su forma decimal (0.75, 0.5, 0.25) o en su forma de fracción (¾ ,½, ¼).* Pero estos no son todos los números que existen. Para una mejor visualización de todos los tipos de números mostramos el siguiente esquema:



Con esta clasificación de los números, se han logrado establecer las bases para realizar todas las operaciones aritméticas. Estos números se utilizan en todas las áreas de las matemáticas y la física. Con ellos se han desarrollado el álgebra, el cálculo, la geometría y en general todo lo que tiene que ver con las matemáticas como ciencia.

> **“Poca ciencia aleja muchas veces de Dios y mucha ciencia conduce siempre a él”**
>
> *Francis Bacon*

CÁLCULO DEL FIN DEL MUNDO

Cuenta la leyenda que Dios, jugando con el destino del hombre, construyó un templo en Benarés e instaló allí tres agujas de madera. En la primera de ellas colocó 64 discos ordenados desde el mayor hasta el menor: el mayor quedó en la base y el menor hasta arriba. Los sacerdotes del templo recibieron la instrucción de mover todos los discos de su posición original a la tercera aguja, siguiendo tres reglas: *Sólo mover un disco a la vez, no mover más de un disco al día y nunca colocar un disco de mayor diámetro, sobre uno de menor diámetro*. Por último, antes de desaparecer, Dios dijo: *cuando todos los discos de la primera aguja se encuentren en la tercera, el mundo se acabará*.

¿Cuánto tiempo cree usted que le queda al mundo si el templo de Banerés data de 700 a. C.?

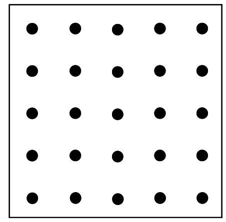
Esta leyenda fue creada en 1883 por el matemático francés Éduard Lucas (1842-1891), y a este acertijo matemático se le bautizó con el nombre *Las torres de Hanoi*. Resultó tan entretenido e ingenioso que hasta la fecha se realizan programas de computadora para resolver el problema. Para quienes tengan la curiosidad de saber cuánto tiempo le queda de vida al planeta sepan que, para pasar todos los discos a la tercera aguja deben realizarse 2^{64}-1 movimientos. Esto, en números redondos, equivale a 585 mil millones de años. Si se sabe que el universo tiene una edad de 15 mil millones de años, podemos estar tranquilos pues todavía faltan 560 mil millones de años para que dejemos de existir.

Éduard Lucas

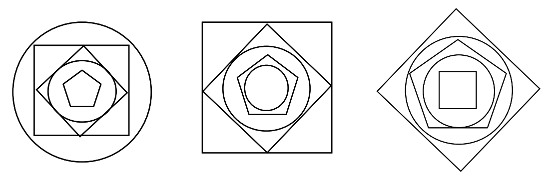
Información obtenida en Wikipedia.com

LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Jueves 9. Si tienes una tabla de madera con 25 clavos, ¿cuántas longitudes diferentes de segmento puedes trazar amarrando un hilo entre los clavos?



Miércoles 22. ¿Qué figura sigue?



Viernes 24. Juan le dice a Pedro que el producto de tres enteros positivos es 36. Además le dice la suma de los números, pero aún así Pedro no tiene suficiente información para encontrar los tres números. ¿Cuál es la suma de los tres números?

Martes 28. Coloca los números 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8 de tal forma que la suma de los números de cada una de las filas, columnas y diagonales sea 17 ó 19.

Matemáticas para todos. Año 9, número 84, octubre de 2008. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx