# MATEMÁTICAS PARA TODOS

Educación y Desarrollo, A. C.

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas

*Año 10, Número 94, octubre de 2009*

**EN ESTE BOLETÍN:**



## LAS MUJERES MATEMÁTICAS

Hace tiempo comentamos la vida y obra de Hipatia de Alejandría (370-415), sin embargo, bien vale recordar ahora algunos hechos sobresalientes de esta bella e inteligente matemática. Fue hija de Teón (375-405), matemático y astrónomo miembro del Museo de Alejandría. De acuerdo con algunas fuentes, después de haberse preparado en diferentes lugares del mundo conocido en aquella época, Hipatia fundó una escuela de filosofía, astronomía y matemáticas en su ciudad natal, Alejandría.

*Hipatia de Alejandría*

En esta escuela se permitía la asistencia a mujeres, políticos, esclavos y judíos. El género, la sabiduría, la belleza y la visión social de Hipatia le generaron tal popularidad que cuando viajaba en su carruaje hacia su escuela el pueblo le arrojaba pétalos de rosas y la vitoreaba. Esta misma fama le produjo también el celo y odio de los miembros de la naciente religión católica, a grato tal, que en el año 415 los monjes de la iglesia de San Cirilo de Jerusalén la asesinaron tras martirizarla. La gran Hipatia enseñó durante 20 años matemáticas, astronomía, lógica, filosofía y mecánica. Estudió de manera metódica las ecuaciones diofánticas, las cónicas, y compartió y sustentó con sus alumnos la teoría heliocéntrica (el Sol centro del sistema planetario). Las ecuaciones diofáticas son aquellas cuyas soluciones tienen sólo números naturales. Por ejemplo, $ax + by = c$

Para que ésta ecuación tenga solución $c$ tiene que ser divisible entre el máximo común divisor de $a$ y $b$.

De manera práctica, imagine que el producto de un problema plantea la siguiente ecuación: $3x + 5y = 52$ y que los valores de $x$ y $y$ sólo pueden ser números naturales.

Bajo esta premisa podemos despejar la $x$:

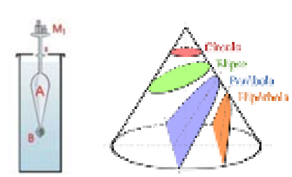
$$x = \frac{52 - 5y}{3}$$

Ahora hagamos una tabulación de $y$ con números naturales:

| $y$ | $x$ | $y$ | $x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 17.33 | 6 | 7.33 |
| 1 | 15.67 | 7 | 5.67 |
| 2 | 14.00 | 8 | 4.00 |
| 3 | 12.33 | 9 | 3.33 |
| 4 | 10.67 | 10 | 0.67 |
| 5 | 9.00 | 11 | -1.00 |

En este caso, sólo cuando el valor de $y$ es *2*, *5* y *8* se satisface la condición de la ecuación diofántica ya que son los únicos números naturales con los que $x$ también es otro número natural *(14, 9 y 4)*.

Hipatia participó además en la invención del aerómetro, aparato que sirve para medir algunas propiedades físicas de los gases, como por ejemplo la densidad.



*Aerómetro y conjunto de cónicas*

Contribuyó también a mejorar el astrolabio, instrumento que se utilizaba para determinar la posición de las estrellas.

> **"Estudiar lo anormal es la mejor vía para entender lo normal."**
> *William James*

**“Antes que hombres de ciencia deberíamos ser hombres.”**

*Albert Einstein*

*Astrolabio*

*Astrolabio*

Por todo esto y mucho más, Hipatia de Alejandría fue una gran matemática y maestra a la que hoy reconocemos con todo respeto y admiración.

## ALGO DEL ÁLGEBRA Y SU ENSEÑAZA

El álgebra es una de las partes más útiles de las matemáticas ya que con ella es posible estudiar y plantear problemas, presentar fórmulas y describir procedimientos. Ésta es, sin duda, la herramienta más utilizada por las ciencias.

La definición más sencilla de *álgebra* es:

*Combinación de un conjunto de letras, números y signos matemáticos con los que se indica un procedimiento matemático o una ecuación.*

Lo importante es que las letras pueden sustituirse por los valores adecuados y —tras resolver todas las operaciones que se indican con signos (+, –, *x*, ÷), con exponentes y radicales ($a^2$, $a^3$,… $a^n$ ; $\sqrt{a}$) y con logaritmos $c \log a = b$— obtener los resultados de casi todo lo que tiene relación con los números.

Por ejemplo, si tenemos $a + a$ podremos expresar lo siguiente $a + a = 2^a$; y si tuviéramos $a$ x $a$ obtendríamos $a\ x\ a = a^2$; y $a\ x\ b = ab$.

Al realizar una división podemos, igual que lo hacemos con los números, expresarla de la siguiente manera:

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

De acuerdo con algunos profesores de secundaria y bachillerato, las operaciones algebraicas en las que se incluyen fracciones, exponentes o signos siempre generan dolores de cabeza en el aprendizaje. Siendo así, nos detendremos un poco a analizar estas operaciones.

En realidad, si se sabe hacer estas operaciones con números también se sabrá hacerlas con letras, todo es cuestión de reflexionar.

Iniciemos con las fracciones, explorando primero el procedimiento con números y luego con letras. Usaremos como ejemplo una operación con suma y multiplicación de fracciones.

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{4-3}{6}\right)\times\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{5}{48}$$

Si esta operación estuviera representada por letras, tendríamos lo siguiente:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\times\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{ad-cb}{bd}\right)\times\left(\frac{e}{f}\right)=\frac{e(ad-cb)}{f(bd)}=\frac{ead-ecd}{fbd}$$

Parece difícil pero no lo es. Es necesario únicamente un poco de práctica e imaginación para reducir los términos. Como todo en las matemáticas, hay que entender, practicar y ser ordenado.

Sigamos ahora con los exponentes. El exponente es el número pequeño que se pone arriba de un número o letra llamada base. El número pequeño indica el total de veces que la base debe multiplicarse por sí misma:

$$3^2 = 3_1\ x\ 3_2 = 9; \qquad a^n = a_1\ x\ a_2\ x\ a_3 \ldots x a_n$$

Si la base (sea letra o número) no tuviera exponente, es como si tuviera el número uno:

$$a = a^1; \qquad 5 = 5^1; \qquad x = x^1.$$

Para realizar una suma o resta de términos similares que tengan exponentes, deben hacerse primero las operaciones de cada término y luego tratar de reducir cada uno de éstos. Observe que este caso los exponentes no se suman ni restan.

$$3^2 = 3_1\ x\ 3_2 = 9; \qquad a^n = a_1 x a_2 x a_3 \ldots x a_n$$

Si la base, ya sea letra o número, no tiene exponente, es como si tuviera el número uno:

$$a = a^1; \qquad 5 = 5^1; \qquad x = x^1.$$

Para realizar una suma o resta de términos similares que tengan exponentes; deben hacerse primero las operaciones de cada término y luego tratar de reducirlos. (Observen que este caso los exponentes no se suman ni restan).

$$3^2 + 4^3 = (3\ x\ 3) + (4\ x\ 4\ x\ 4) = 73$$

$$a^2 + b^3 = (a_1\ x\ a_2) + (b_1\ x\ b_2\ x\ b_3)$$

Cuando se multiplican dos términos semejantes con exponentes, el resultado es la base semejante elevada a la suma de los exponentes. Hagamos primero la prueba con números y luego con letras.

$$4^2\ x\ 4^3 = (4\ x\ 4)\ x\ (4\ x\ 4\ x\ 4) = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$$

$$a^2\ x\ a^3 = (a_1\ x\ a_2)\ x\ (a_1\ x\ a_2\ x\ a_3) = a^5$$

$$a^m\ x\ a^n = a^{m+n}$$

Cuando se dividen dos términos semejantes con exponentes, el resultado es la base elevada a la diferencia de los exponentes como se presenta a continuación:

$$\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3$$

$$\frac{a^4}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^{4-3} = a$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Cuando una letra o cantidad ya tiene un exponente y se le pone otro exponente, el resultado es esa misma letra o cantidad con un exponente producto de los exponentes.

$$(3^2)^3 = (3x3)^3 = (9)^3 = (9x9x9) = 3^{2x3} = 3^6 = 729$$

$$(a^2)^3 = a^2 \ x \ a^2 \ x \ a^2 = a^6$$

$$(a^2)^3 = a^{2 \ x \ 3} = a^6$$

$$(a^m)^n = a^{m \ x \ n}$$

Ahora analicemos los signos. Antes que nada, recordemos las leyes de los signos pues ellas dominarán todas nuestras operaciones.

*En la suma y resta con signos iguales, las cantidades se suman conservando el signo de los elementos:*

$$+2a + 3a = +5a \, ; -2a - 3a = -7a \ ;$$

*En suma y resta con signos diferentes, las cantidades se restan y se conserva el signo del número mayor:*

$$+2a - 3a = -1a \ ; \ -2a + 3a = +1a$$

*En la multiplicación y división, operaciones con signos iguales dan positivo y operaciones con signos diferentes dan negativo:*

*Multiplicación:*

$$(+2a)(+3a) = +6a^2 \ ; \ (-2a)(-3a) = +6a^2$$

$$(-2a)(+3a) = -6a^2 \ ; \ (+2a)(-3a) = -6a^2$$

*División:*

$$\frac{(+6a)}{(+3a)} = +2 \ ; \ \frac{(-6a)}{(-3a)} = +2$$

$$\frac{(+6a)}{(-3a)} = -2 \ ; \ \frac{(-6a)}{(+3a)} = -2 \ ; \ \frac{(-6ab)}{+3a} = -2b$$

Lo interesante del álgebra es que con letras (literales), signos y números se pueden expresar todas las fórmulas necesarias para calcular cualquier cosa que tenga relación con los números.

## POR QUÉ NO APRENDEMOS ÁLGEBRA

Tras platicar con algunos maestros de secundaria, observar la forma en la que ellos enseñan las matemáticas, y analizar el programa de matemáticas de primero y segundo de secundaria, he llegado a las siguientes conclusiones:

1. **Los alumnos no cuentan con los conocimientos elementales de aritmética**
   Aunque parece increíble, en el segundo de secundaria los alumnos no siempre tienen estas bases, no obstante que en primero de secundaria se hace un repaso muy amplio de estos temas. Lamentablemente, lo mismo sucede en los niveles de bachillerato y licenciatura.
2. **La cantidad de temas en 1º y 2º de secundaria es excesiva.**
   El tema del álgebra es fundamental para continuar aprendiendo matemáticas y otras materias. Esto queda manifiesto en el Programa de Matemáticas de primero y segundo de secundaria al destacar entre los objetivos el de “desarrollar el proceso algebraico”. Sin embargo, al analizar el programa, encontramos más de 120 temas relacionados con aritmética, geometría, medición, cálculo, representación, procesamiento de la información, etc. Todos estos temas aparecen en lecciones que brincan de uno a otro. Desde mi punto de vista, los temas están desperdigados, expuestos de manera extensa y sin relación entre ellos. Esto hace que los profesores no les dediquen el tiempo suficiente para que los alumnos maduren su aprendizaje. En el Programa de Estudios de Matemáticas pareciera que los alumnos sólo llevan una sola materia: “matemáticas”. Además, las lecciones están diseñadas para que el aprendizaje del álgebra surja como una epifanía producto de cada lección. Debido a la gran cantidad de contenidos y a los saltos de un tema a otro, es necesario enseñar corriendo y de brinco en brinco, lo que impide la reflexión. No dudo que, cuando se tiene una buena preparación, este método pueda dar resultados, pero nuestros alumnos de primaria no siempre comprenden el uso de las operaciones básicas o ni siquiera saben leer.
3. **Los docentes no cuentan con técnicas didácticas exitosas para la enseñanza del álgebra.**
   No todos los libros de texto seleccionados para la enseñanza del álgebra incluyen técnicas didácticas para esta materia. Incluso, en muchas ocasiones, se presentan ejemplos y ejercicios que no son significativos ni para los alumnos ni para los docentes. En la mayoría de los casos, tampoco se dan recomendaciones sobre los

**“No permitáis que lo que no podéis comprender os aplaste.”**

*Benitez J.J.*

principales obstáculos en el aprendizaje de este tema y, mucho menos, se sugiere utilizar la gran cantidad de software interactivo que existe en la Red para el aprendizaje y la aplicación del álgebra.

Otro problema grave es que no todos los docentes aman a las matemáticas y eso lo trasmiten a sus alumnos. Los jóvenes de secundaria están listos para aprender aquello que les sirva y les haga más fácil su vida; si no presentamos al álgebra desde esta perspectiva, es muy probable que nuestros alumnos no sólo no la aprendan sino que la odien.

También he observado que el libro de texto es, en muchas ocasiones, el medio que los docentes usan para aprender los temas que van a enseñar. Si las explicaciones en los libros son muy generales, no están bien desarrolladas o parten de supuestos equivocados, los docentes transmiten estos defectos a sus alumnos.

## QUÉ HACER PARA ENSEÑAR ÁLGEBRA

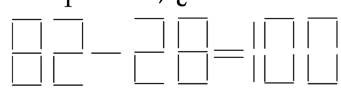
Me permito hacer tres sugerencias las que pueden implementarse sin generar altos costos y que los docentes estarían dispuestos a aceptar.

1. **Disminución de los temas en 1º y 2º de secundaria**, concentrándose sólo en los relacionados con el dominio de la aritmética y el aprendizaje del álgebra. Además se deberán utilizar técnicas de enseñanza exitosas que permitan al alumno aplicarlos de manera inmediata en su vida diaria.
2. **Creación de talleres de álgebra** que puedan ser tomados por los docentes vía Internet y en los que se incluyan: los temas, sus metodologías de enseñanza, ejercicios y software de práctica. Estos talleres también los podrían tomar los alumnos, así entre docentes y alumnos desarrollarían los cursos y nos alejaríamos de idea de que el docente debe saber todo.
3. **Diseñar un curso de autoaprendizaje de los conocimientos mínimos necesarios para entender el álgebra**. Este curso puede servir como medio de nivelación y además para definir cuáles son los conocimientos mínimos que se deben tener para aprender esta materia. Este curso puede utilizarse antes de iniciar la secundaria o como guía para la mejoría de los alumnos. <u>No debe formar parte de los contenidos del programa</u>, en realidad debe ser un curso que puedan tomar todas aquellas personas que deseen enseñar o aprender álgebra.

Estoy seguro que estas propuestas no son suficientes pero nuestros lectores nos pueden orientar con otras.

## LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

**Lunes 5.** Esta operación es incorrecta. Moviendo 2 palitos, ¿cómo la corriges?



**Lunes 12.** Sean $AB$ y $CD$ dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia que se intersecta en $P$. Si $AP = 2cm$, $BP = 3cm$, $CP = 1cm$ y $DP = 6cm$, ¿cuánto mide la longitud del diámetro de la circunferencia?

**Miércoles 14.** Si $a$ y $b$ son números reales positivos tales que $a^2+b^2=c^2$ y $ab=c$, determina el valor de

$$\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)}{c^2}$$

**Matemáticas para todos.** Año 10, número 94, octubre de 2009. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

**E-mail**: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Educación y Desarrollo

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

Coordinación de Ingeniería de Sistemas