F M E D

MATEMÁTICAS PARA TODOS

Educación y Desarrollo, A. C.

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

Coordinación de Ingeniería de Sistemas

Año 11, Número 98, marzo de 2010

MONSIEUR LE BLANC

Monsieur Le Blanc fue en realidad Marie-Shopie Germain (1776-1831), una destacada francesa que a los 13 años, por un libro sobre la obra y muerte de Arquímedes, se inició de manera autodidacta en el mundo de las matemáticas. A los 19 años, logró obtener los apuntes de la asignatura de análisis que Joseph-Louis Lagrange impartía en la École Polytechnique. Puesto que en esa época no se permitía la participación de las mujeres en las escuelas de educación superior, Sophie utilizó el nombre de Monsieur Antoine-Auguste Le Blanc (uno de los alumnos de Lagrange que había abandonado sus estudios) para firmar un trabajo que envió directamente al maestro. Lagrange quedó tan impresionado, que al saber la verdadera identidad de la autora fue a felicitarla y se convirtió en su mentor. Años después, inspirada por la obra *Disquisitiones Arithmeticae* de Karl Friedrich Gauss, Sophie inició sus estudios sobre la teoría de los números y, en 1804, firmando nuevamente como Monsieur Le Blanc, le envió a Gauss uno de sus trabajos. Gauss reconoció la gran calidad del trabajo, pero no se enteró entonces del nombre real de la autora. En 1806, las tropas napoleónicas tomaron Brunswick, la ciudad en la que vivía Gauss. Sophie, quien conocía el carácter de Gauss y seguía impresionada por la historia de la muerte de Arquímedes a manos de un soldado, pidió a su amigo personal, el General Pernety, que protegiera de manera especial a Gauss. Cuando los soldados informaron a Gauss que tenían el encargo de protegerle por petición de Mademoiselle Germain, él dijo no conocerla; fue hasta entonces que supo la verdadera identidad de Monsieur Le Blanc.

En 1811, la Academia de Ciencias Francesa organizó un concurso para explicar la ley de las vibraciones en superficies elásticas. Sophie, tras cinco años de estudio, consiguió dar con la solución. Con esto, logró que se hicieran a un lado los prejuicios de género al convertirse en la primera mujer en ingresar a dicha Academia. Marie-Sophie murió unos días antes de recibir el doctorado honoris causa, promovido por el mismo Gauss en su universidad.

Sophie Germain a los 14 años
grabado de Auguste-Eugène Leray

Marie-Sophie Germain —Monsieur Le Blanc— cuenta aún hoy con gran prestigio entre la comunidad matemática del mundo.

LAS ODIOSAS ECUACIONES DE 2º GRADO

El programa de matemáticas de secundaria incluye el tema de solución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita. Éste tema es odiado por casi todos los docentes y la totalidad de los alumnos. Los motivos que hacen que este tema sea calificado de "horrible", en otros son que:

1. *Se requiere de algunos conocimientos básicos de álgebra y, desde luego, su aplicación y manejo.*
2. *Es necesario hacer un esfuerzo de abstracción matemática para comprender la utilización del tema y en qué hechos cotidianos se puede utilizar.*
3. *Los docentes, además de conocer el tema, requerimos de mucha habilidad y calma para explicarlo.*

De estos tres elementos, tal vez el menos conflictivo sea el primero pues las propias ecuaciones cuadráticas pueden servir como medio para adquirir los conocimientos básicos del álgebra. Los

> **"La ciencia se suicida cuando adopta un credo."**
> *Thomas H. Huxley*

“La educación es aquello que permanece, cuando uno ha olvidado todo lo que aprendió en la escuela.”

Albert Einstein

otros dos puntos pueden implicar varias horas, o hasta días, de reflexión del docente para encontrar el camino adecuado.

Algunos conocimientos de álgebra

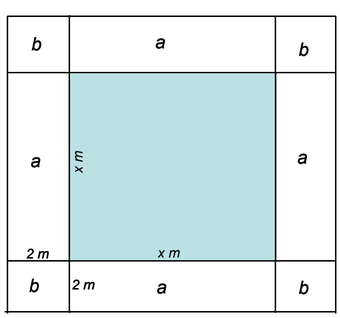
Para poder enseñar las ecuaciones de segundo grado, entre otras cosas, se requiere saber:

a. *Qué es y para qué sirve una ecuación.*
b. *Despejar y conocer cómo se realiza el movimiento de los elementos de las ecuaciones.*
c. *Plantear ecuaciones.*

ENSEÑANZA DE LAS ECUACUOINES DE 2º GRADO

Lo primero es tratar que los alumnos encuentren el uso de las ecuaciones de segundo grado en la vida cotidiana, pues si logramos que entiendan su aplicación y la necesidad de encontrar su solución, habremos dado un gran paso. En Internet existen varios sitios que dan ejemplos de actividades que generan ecuaciones de 2º grado.

Por ejemplo, si usted tiene un terreno cuadrado y un día le informan que le construirán una banqueta de 2 *m* en cada lado. ¿Qué fórmula podría deducir para calcular el área de su terreno con todo y banqueta *(S)*?



Es muy importante que los alumnos apliquen la lógica, necesaria para construir ecuaciones.

Lo primero es definir el área del terreno sin banqueta, esto es:

$$x \bullet x = x^2$$

Ahora, tomemos en cuenta los cuatro rectángulos *a* que tienen como dimensiones 2 y *x*. Como son cuatro, su superficie es:

$$4(2 \bullet x) = 8x$$

Sólo nos falta la superficie de los cuatro cuadrados *b*, los que tienen lados de 2 metros cada uno.

$$4(2 \bullet 2) = 16$$

Sólo nos falta sumar las tres ecuaciones obtenidas.

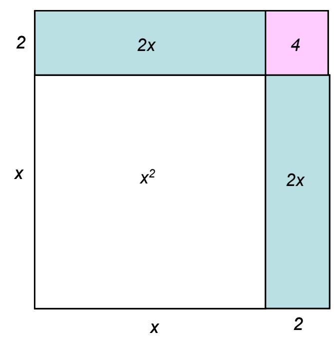
$$x^2 + 8x + 16 = S$$

Ahora podemos saber que si su terreno tiene *10 metros* de lado, su superficie es igual a *196 m²*. Esto lo conocemos al sustituir *x=10* en la ecuación:

$$(10)^2 + 8(10) + 16 = 196m^2$$

Con esto se ha planteado una ecuación de 2º grado. A los alumnos se les puede decir que el 2º grado se debe a que tiene un elemento elevado al cuadrado.

Otro ejemplo: Si tiene un terreno en una esquina y le construye una banqueta de 2 m en los dos lados que forman la esquina, ¿cuál sería la ecuación para calcular la superficie del terreno incluyendo la banqueta?



En este caso, la fórmula puede deducirse de dos maneras distintas:

1. *Viendo el cuadrado con su banqueta, con lo que tendría lados de x más 2 metros.*

   l=x+2

   Para calcular el área de ese cuadrado se tendrá:

   $(x+2)(x+2)=(x+2)^2=x^2+4x+4$

   Observe que con este razonamiento está utilizando un producto notable y su desarrollo.

2. *También podría seguir un procedimiento como el que se utilizó en el primer ejemplo.*

   a) *superficie del cuadrado central:*

   $$x \bullet x = x^2$$

   b) *Superficie de los rectángulos laterales:*

   $$2 \bullet x = 2x$$

   Pero como son dos rectángulos tendremos:

   $$2(2 \bullet x) = 4x$$

   c) *Ahora sólo falta la superficie de cuadrado de 2 por 2:* $(2 \bullet 2) = 4$

Integrando las tres superficies tendremos:

$$x^2 + 4x + 4 = S$$

La verdadera trascendencia de esto no es la fórmula en sí, sino que nuestros alumnos entiendan cómo se crean las ecuaciones y que con éstas cuando se tiene un solo valor *(x)* se encuentra el resultado buscado.

> **"Estudiar lo anormal es la mejor vía para entender lo normal."**
>
> *James William*

Si quieren apantallar, digan que han aprendido a construir un modelo matemático para calcular la superficie de terrenos con aceras de dimensiones definidas.

Para que a los alumnos les interese el tema, y con ello lo entiendan mejor, es recomendable partir de problemas de la vida real.

Por ejemplo: Se tiene un terreno en el que su largo excede en 7 metros al ancho. Si su área es de $120\ m^2$, ¿cuáles son sus dimensiones?

Si establecemos que x es el largo y y el ancho, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$x = y + 7$$

Como sabemos que la forma del terreno es un rectángulo, podemos plantear una segunda ecuación:

$$x \bullet y = 120$$

En el problema planteado, nos solicitan que demos los valores de x y y, es decir, la longitud de los lados.

Si despejamos de la primera ecuación a y, y su resultado lo sustituimos en la segunda, tenemos:

1. *El despeje:* $x - 7 = y$
2. *Sustitución:* $x \bullet (x - 7) = 120$
3. *Simplificación:* $x^2 - 7x - 120 = 0$

Ésta es una ecuación en la que, si conocemos x, podemos obtener el largo del terreno.

En este caso, lo importante es que los alumnos estén concientes de que tienen una ecuación y de que requieren saber el valor que debe tomar x para que el resultado sea cero.

Existen varios métodos para resolver las ecuaciones de segundo grado, los más aplicados son:

- ✓ *Por factorización simple*
- ✓ *Completando el cuadrado*
- ✓ *Aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de 2º grado*

Considero que si los alumnos saben aplicar la fórmula general, o sea el tercer método, siempre tendrán éxito. Para que esta fórmula no se aplique como receta, es necesario conocer de dónde surge. Por esta razón, y dada la falta de espacio, sólo me concentraré en aplicar la fórmula.

La fórmula es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En donde a es el número que acompaña a la x^2, b a la x y c el número que no tiene incógnita. Esto de manera algebraica se puede ver así:

$$ax^2+bx+c=0$$

En el caso de nuestro terreno tenemos que:

$$a = 1,\ b = -7 \text{ y } \quad c = -120$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-120)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2} = \frac{7 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = -8$$

Como no puede haber distancias negativas en las dimensiones de un terreno, desechamos -8 y tomamos como bueno el valor de 15.

La comprobación del resultado la obtenemos al sustituir el valor de 15 en lugar de x.

$$x^2 - 7x - 120 = 0$$

$$(15)^2 - 7(15) - 120 = 0$$

$$225 - 105 - 120 = 0$$

$$225 - 225 = 0$$

Esto implica que el terreno tiene de largo $x = 15\ m$

Ahora ya podemos resolver la segunda ecuación ($x \bullet y = 120$), y al despejar y obtendremos el ancho del terreno.

$$y = \frac{120}{15} = 8$$

De dónde sale la famosa fórmula

Bhaskara II o Bhaskaracharya (1140-1185) fue un matemático y astrónomo hindú que, además de deducir la fórmula que nos ocupa, logró solucionar ecuaciones indeterminadas de segundo, tercer y cuarto grados. La fórmula la obtuvo de manera sencilla y elegante como sigue:

Primero, no debemos olvidar que lo que deseamos es conocer el valor de x en una ecuación con la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si, para mantener la igualdad en ambos términos, los multiplicamos por 4a tenemos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0(4a)$$

Ahora, si sumamos b^2 en ambos términos, tenemos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$$

Al analizar los tres primeros monomios, nos damos cuenta de que equivalen a un trinomio cuadrado perfecto:

> **“Hay que tener fe en la ciencia para llegar a la ciencia de la fe.”**
> *Eliphas Levi*

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$$
$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ahora sólo falta despejar x:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta es la famosa fórmula para encontrar el valor de x en una ecuación de segundo grado.

GRAFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE 2º GRADO

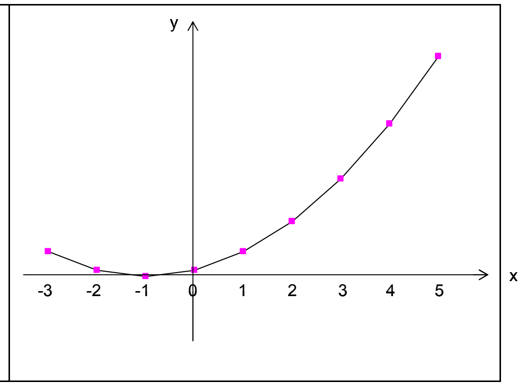
Todas las ecuaciones cuadráticas generan curvas, éstas pueden ser como la forma de un cable entre poste y poste (llamada catenaria), la trayectoria parabólica que sigue la bala de un cañón después de ser disparado, y otras muchas. Es importante que nuestros alumnos tengan una idea general de lo que representan las ecuaciones de 2º grado, por ello es muy conveniente tabularlas y graficarlas.

De lo primero que se debe estar conciente es que, cuando se busca la solución de una ecuación de segundo grado como lo hicimos arriba, la ecuación está igualada a cero. Esto implica que calculamos la x para el punto en el que y vale cero. Si tabulamos la ecuación:

$$x^2 + 2x + 1 = y$$

Obtenemos una gráfica como la que se muestra a continuación.

X	y
-3	4
-2	1
-1	0
0	1
1	4
2	9
3	16
4	25
5	36



Observe que cuando *y=0, x= –1* que es el valor que obtuvimos como solución.

Como pueden observar nuestros queridos lectores, enseñar las muy odiadas ecuaciones de segundo grado nos puede ayudar a que los alumnos aprendan a plantear ecuaciones, a practicar y a aplicar el álgebra y, desde luego, a resolver las ecuaciones por diferentes caminos. Es un tema complejo que requiere que el docente tenga muy claros los conocimientos y los procedimientos que utilizará para tratarlo. Esto implica tiempo y mucha paciencia, tanto de los docentes como de los alumnos.

LOS PROBLEMAS DEL CALENDARIO

Lunes 1. Un delincuente desinfla todas las llantas de todos los automóviles y motocicletas estacionados en una calle. La policía lo arresta y nota que se dañaron 44 vehículos y 144 llantas. ¿Cuántas motocicletas había?

Jueves 4. Escribe el número 1,111,111,111 –22,222 como el cuadrado de un entero positivo.

Lunes 8. Determina las parejas (a,b) en enteros positivos que satisfacen la ecuación $a^2+10b=2010$

Educación y Desarrollo
INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM
Coordinación de Ingeniería de Sistemas

Matemáticas para todos. Año 11, número 98, marzo de 2010. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.
E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx